ESAME DI GEOMETRIA — SVOLGIMENTO

Corso di Laurea in Ingegneria

---

1) Modulo e argomento di $z = (\sqrt{3} - i)^7$.

Scriviamo la base in forma trigonometrica. Il numero $w = \sqrt{3} - i$ ha

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

Per le potenze conviene la forma trigonometrica e la formula di De Moivre $w^n = |w|^n\big(\cos n\theta + i \sin n\theta\big)$.

Quindi

$$z = w^7 = 2^7\Big(\cos\big(-\tfrac{7\pi}{6}\big) + i\sin\big(-\tfrac{7\pi}{6}\big)\Big) = 128\Big(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\Big),$$

avendo riportato l'argomento nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ tramite $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6}$.

$$|z| = 128, \qquad \arg(z) = \frac{5\pi}{6}$$

(a controllo, in forma cartesiana $z = 128\big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\big) = -64\sqrt{3} + 64\,i$.)

2) Polinomio reale di grado minimo con radice $2 + i$ e $P(0) = 10$.

Un polinomio a coefficienti reali ha radici complesse a coppie coniugate: se α è radice, lo è anche $\bar{\alpha}$.

Poiché $2 + i$ è radice, lo è anche $2 - i$. Il polinomio di grado minimo è dunque

$$P(x) = k\,(x - (2+i))(x - (2-i)) = k\big((x-2)^2 + 1\big) = k\,(x^2 - 4x + 5), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $P(0) = 10$: $\quad k \cdot 5 = 10 \;\Rightarrow\; k = 2$. Quindi

$$P(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

Verifica: $P(0) = 10$ e $P(2+i) = 2\big((i)^2 + 1\big) = 2(-1+1) = 0$. ✓

3) Conica $C:\ 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$.

La matrice della parte quadratica (il coefficiente di xy va diviso a metà fuori diagonale) è

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il tipo di conica a centro si legge dal segno degli autovalori di Q.

Autovalori: $\det(Q - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$, cioè $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$. Sono entrambi reali, non nulli e concordi (positivi). La matrice completa $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{smallmatrix}\right)$ ha determinante $-72 \neq 0$, quindi la conica è non degenere.

Non essendoci termini lineari, il centro è l'origine e non serve traslazione: una rotazione che porta gli assi lungo gli autovettori di Q diagonalizza la parte quadratica, e gli autovalori diventano i coefficienti. Una forma canonica è

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - 12 = 0 \;\Longrightarrow\; X^2 + 6Y^2 - 12 = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Tipo: ellisse (a punti reali).

4) Proiezione ortogonale di $P = (2,0,3)$ sulla retta $r:\ x - y = z - 1 = 0$.

La retta è $\{x = y,\ z = 1\}$; in forma parametrica

$$r:\ (x,y,z) = (0,0,1) + t\,(1,1,0), \qquad A = (0,0,1),\quad \mathbf{d} = (1,1,0).$$

La proiezione è $Q = A + \dfrac{(P-A)\cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\,\mathbf{d}$ *(componente di* $P - A$ *lungo la direzione della retta).*

Con $P - A = (2,0,2)$: $(P-A)\cdot\mathbf{d} = 2 + 0 + 0 = 2$, $|\mathbf{d}|^2 = 2$, $t = \dfrac{2}{2} = 1$. Dunque

$$Q = (0,0,1) + 1\cdot(1,1,0) = (1,1,1)\,.$$

La distanza è

$$d(P,r) = |P - Q| = |(1,-1,2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}.$$

5) Matrice di f rispetto alle basi canoniche.

Le immagini sono date sui vettori $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$*; basta esprimere la base canonica come combinazione di questi.*

Si ha

$$(1,0,0) = \tfrac{1}{2}\big[(1,1,0) + (1,-1,0)\big], \qquad (0,1,0) = \tfrac{1}{2}\big[(1,1,0) - (1,-1,0)\big],$$

e $(0,0,1)$ è già nella lista. Per linearità:

$$f(1,0,0) = \tfrac{1}{2}\big[(1,2,1) + (3,0,-1)\big] = (2,1,0), \quad f(0,1,0) = \tfrac{1}{2}\big[(1,2,1) - (3,0,-1)\big] = (-1,1,1),$$

$$f(0,0,1) = (0,1,2).$$

Le immagini della base canonica sono le colonne della matrice cercata:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In alternativa, con N *matrice di cambio base da* B *alla canonica (colonne = vettori di* B*) e* M *la matrice avente per colonne le immagini, vale* $M = A_f N$*, da cui* $A_f = MN^{-1}$*: stesso risultato.*

6) Numero di soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = (h+1,0,0)^\top$ al variare di h.

Calcoliamo $\det A$ *con Laplace lungo la* 2^a *colonna (unico elemento non nullo è* $A_{22} = h+1$*).*

$$\det A = (h+1)\det\begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{pmatrix} = (h+1)(1-h^2) = (h+1)^2(1-h).$$

Quindi $\det A = 0 \iff h = -1$ oppure $h = 1$. Applichiamo il teorema di Rouché–Capelli ($n = 3$ incognite).

Caso $h \neq -1$ **e** $h \neq 1$**.** $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A\,|\,b) = 3 = n$*: una e una sola soluzione.*

Caso $h = 1$**.** Allora $b = (2,0,0)^\top$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima riga dà $0 = -2$, assurdo: $\operatorname{rg} A = 2 < \operatorname{rg}(A\,|\,b) = 3$. *Nessuna soluzione (sistema impossibile).*

Caso $h = -1$**.** Allora $b = (0,0,0)^\top$ (sistema omogeneo) e $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha $\operatorname{rg} A = 1$ (le righe non nulle sono multiple di $(1,0,-1)$). Essendo omogeneo è sempre compatibile, con $\infty^{n - \operatorname{rg} A} = \infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni.

$$h \notin \{-1,1\}:\ 1 \text{ soluzione}; \qquad h=1:\ \text{nessuna}; \qquad h=-1:\ \infty^2 \text{ soluzioni}.$$

7) Per $h=1$: A è diagonalizzabile? Matrice diagonale simile.

Per $h=1$, $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)$ è *simmetrica reale*, dunque per il **teorema spettrale** è diagonalizzabile (autovalori reali, autovettori ortogonali). Calcoliamo comunque gli autovalori.

La direzione y è disaccoppiata (colonna $(0,2,0)$): dà l'autovalore 2. Il blocco in (x,z) è $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, con autovalori 0 e 2.

Autovalori: $\lambda=0$ (semplice) e $\lambda=2$ (doppio). Controllo delle molteplicità:

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \text{ ha rango } 1 \Rightarrow \dim E_2 = 3-1=2,$$

pari alla molteplicità algebrica; per $\lambda=0$, $\operatorname{rg} A=2 \Rightarrow \dim E_0=1$. Le molteplicità coincidono: *diagonalizzabile*. Una matrice diagonale simile è

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

con matrice del cambio base $P=\left(\begin{smallmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (autovettori $(-1,0,1)$ per 0; $(0,1,0),(1,0,1)$ per 2), tale che $P^{-1}AP=D$.

8) Per $h=2$: A è invertibile? Calcolo di A^{-1}.

Per $h=2$, $\det A=(h+1)^2(1-h)=9\cdot(-1)=-9\neq 0$: *invertibile*.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

La variabile y è disaccoppiata: la sua inversa è $1/3$. Resta il blocco (x,z).

Il blocco $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ ha determinante $1-4=-3$ e inversa $\frac{1}{-3}\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\-2&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-1/3&2/3\\2/3&-1/3\end{smallmatrix}\right)$. Quindi

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Verifica: $A\,A^{-1}=I$. ✓

9) Endomorfismo g: $\ker g$ e $\dim \operatorname{Im} g$ per $h=1$; isomorfismo per quali h.

Per $h=1$ la matrice di g è $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)$. Il nucleo è l'insieme delle soluzioni di $A\mathbf{x}=0$:

$$\begin{cases}x+z=0\\2y=0\end{cases} \quad \Longrightarrow\ y=0,\ x=-z.$$

Equazioni cartesiane: $\ker g=\{\,y=0,\ x+z=0\,\}$, generato da $(-1,0,1)$, dunque $\dim\ker g=1$. *Per il teorema della dimensione (nullità + rango):* $\dim\operatorname{Im} g=3-\dim\ker g$.

$$\dim \operatorname{Im} g = 3-1=2 \ \ (=\operatorname{rg} A).$$

Infine g è isomorfismo $\iff$ g biiettivo $\iff$ A invertibile $\iff$ $\det A=(h+1)^2(1-h)\neq 0$, cioè

$$g \text{ è isomorfismo} \iff h\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\,1\}.$$

10) Definizione di autovalore e autovettore.

Siano V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $g : V \to V$ un endomorfismo. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice **autovalore** di g se esiste un vettore $v \in V$, *non nullo*, tale che

$$g(v) = \lambda\, v.$$

Ogni vettore $v \neq 0$ che soddisfa $g(v) = \lambda v$ si dice **autovettore** di g relativo all'autovalore λ. (L'insieme di tutti gli autovettori relativi a λ, con l'aggiunta del vettore nullo, forma l'autospazio $E_\lambda = \ker(g - \lambda\,\mathrm{id})$.)