INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

ANALISI MATEMATICA · PROVA SCRITTA

Tema d'esame 1

Induzione, limiti, studio di funzione, integrali

Nome e cognome _____ Data _____

ESERCIZIO 1

Dimostrare per induzione che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il valore del seguente limite utilizzando i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x^2)}{1 - \cos(3x)}$$

ESERCIZIO 3

Studiare la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ e disegnarne il grafico probabile. (Si trovino anche eventuali flessi).

ESERCIZIO 4

Determinare i punti singolari della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 2x}$$

e specificarne il tipo.

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x \ln x \, dx$$

TEMA D'ESAME 1

Soluzioni commentate

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE

Chiamiamo $P(n)$ l'affermazione $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Base ($n=1$). A sinistra c'è $1^3=1$, a destra $\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$. Quindi $P(1)$ è vera.

Passo induttivo. Supponiamo vera $P(n)$ per un certo $n\geq 1$ (ipotesi induttiva) e dimostriamo $P(n+1)$, cioè che $1^3+\cdots+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. Sommiamo $(n+1)^3$ a entrambi i membri di $P(n)$:

$$1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]$$

$$=(n+1)^2\cdot\frac{n^2+4n+4}{4}=(n+1)^2\cdot\frac{(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Questo è esattamente $P(n+1)$. Per il principio di induzione $P(n)$ vale per ogni $n\geq 1$. $\square$

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Riscriviamo la funzione in modo da far comparire i due limiti notevoli $\frac{\sin t}{t}\to 1$ e $\frac{1-\cos t}{t^2}\to\frac{1}{2}$ per $t\to 0$:

$$\frac{\sin(4x^2)}{1-\cos(3x)}=\underbrace{\frac{\sin(4x^2)}{4x^2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}}_{\to 2}\cdot\frac{4x^2}{(3x)^2}.$$

Il primo fattore tende a 1 perché $4x^2\to 0$; il secondo tende a $\frac{1}{1/2}=2$ perché $3x\to 0$; il terzo vale $\frac{4x^2}{9x^2}=\frac{4}{9}$ per ogni $x\neq 0$. Quindi

RISULTATO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x^2)}{1-\cos(3x)}=1\cdot 2\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{9}.$$

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1. **Dominio e segno.** f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poiché $x^2\geq 0$ e $e^{-x}>0$, si ha $f(x)\geq 0$ e $f(x)=0$ solo per $x=0$. Non ci sono simmetrie evidenti.
2. **Limiti e asintoti.** Per $x\to-\infty$: $f\to+\infty$, e $\frac{f(x)}{x}=xe^{-x}\to-\infty$, quindi nessun asintoto obliquo. Per $x\to+\infty$: $x^2e^{-x}\to 0$ (l'esponenziale prevale), quindi $y=0$ è asintoto orizzontale a destra.
3. **Derivata prima.** $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$. Il segno dipende da $x(2-x)$: $f'<0$ per $x<0$ e per $x>2$, $f'>0$ per $0<x<2$. Quindi f decresce su $(-\infty,0)$, cresce su $(0,2)$, decresce su $(2,+\infty)$.

4. **Massimi e minimi.** $x = 0$ è un minimo (assoluto) con $f(0) = 0$; $x = 2$ è un massimo relativo con $f(2) = 4e^{-2}$, cioè circa $0{,}54$.

5. **Derivata seconda.** $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Si annulla per $x = 2 \pm \sqrt{2}$ (circa $0{,}59$ e $3{,}41$); è positiva fuori dalle radici (convessa) e negativa tra le radici (concava).

6. **Flessi.** f'' cambia segno in entrambi i punti, quindi sono due flessi: $x = 2 - \sqrt{2}$ con $f \approx 0{,}19$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ con $f \approx 0{,}38$.

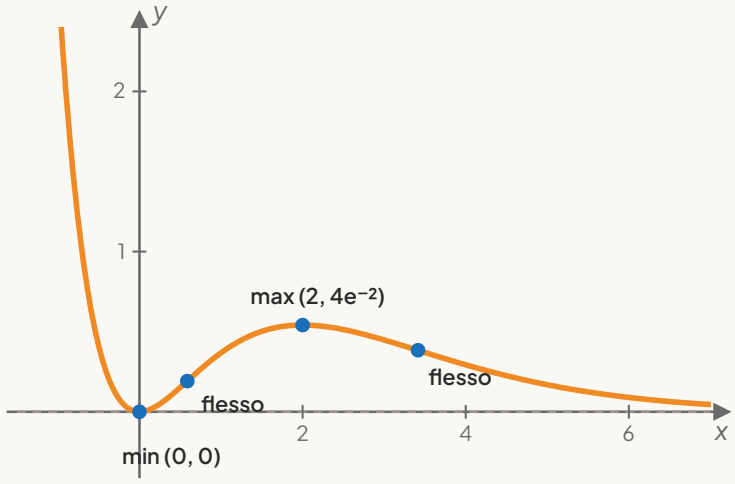


Grafico probabile di $f(x) = x^2 e^{-x}$.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

Il denominatore $x^2 - 2x = x(x - 2)$ si annulla in $x = 0$ e $x = 2$, quindi il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Studiamo i due punti, e poi $x = \pm 2$ dove si annulla il valore assoluto.

Punto $x = 0$. Il numeratore tende a 4. Il denominatore $x(x - 2)$ vale: positivo piccolo per $x \to 0^-$ (entrambi i fattori negativi), negativo piccolo per $x \to 0^+$. Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

È una discontinuità di **seconda specie** (infinita), con asintoto verticale $x = 0$.

Punto $x = 2$. Scriviamo $|x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2|$, quindi vicino a 2 si ha $f(x) = \frac{|x-2|\,(x+2)}{x(x-2)}$. Allora

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{x+2}{x}\Big|_{x=2} = 2, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{x+2}{x}\Big|_{x=2} = -2.$$

I limiti destro e sinistro esistono finiti ma sono diversi: discontinuità di **prima specie** (a salto), di ampiezza 4.

Punto $x = -2$. Qui f è definita e continua ($f(-2) = 0$), ma non derivabile. Per $x < -2$ si ha $f(x) = \frac{x+2}{x}$ con $f'(-2) = -\frac{1}{2}$; per $-2 < x < 0$ si ha $f(x) = -\frac{x+2}{x}$ con $f'(-2) = +\frac{1}{2}$. Le derivate laterali sono diverse: $x = -2$ è un **punto angoloso**.

RISULTATO

$x = 0$: infinito (2ª specie). $x = 2$: salto di ampiezza 4 (1ª specie). $x = -2$: punto angoloso.

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

Integriamo per parti, scegliendo $\ln x$ come fattore da derivare e x come fattore da integrare: $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, da cui $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx.$$

RISULTATO

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c, \quad x > 0.$$

Verifica: derivando il risultato si ottiene $x\ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln x$.