INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

ANALISI MATEMATICA · PROVA SCRITTA

Tema d'esame 2

Induzione, limiti, studio di funzione, integrali

Nome e cognome _____ Data _____

ESERCIZIO 1

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

ESERCIZIO 2

Dopo aver dimostrato che la funzione $f(x) = x^3 + \ln x$ è invertibile, determinare la retta tangente al grafico della sua funzione inversa f^{-1} nel punto $P = (1, f^{-1}(1))$ e disegnarla.

ESERCIZIO 3

Studiare la funzione

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$$

e disegnarne il grafico probabile. (Si tralasci lo studio della derivata seconda).

ESERCIZIO 4

Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione

$$h(x) = e^{-ax^2} + b$$

abbia un flesso di ascissa $x = 1$ e il cui grafico passi per il punto $P = (0; 3)$.

ESERCIZIO 5

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ e determinare l'area della regione di piano compresa tra tale grafico e l'asse delle ascisse.

Soluzioni commentate

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE

Base ($n = 1$). A sinistra $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, a destra $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vera.

Passo induttivo. Supponiamo $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ e aggiungiamo il termine successivo $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

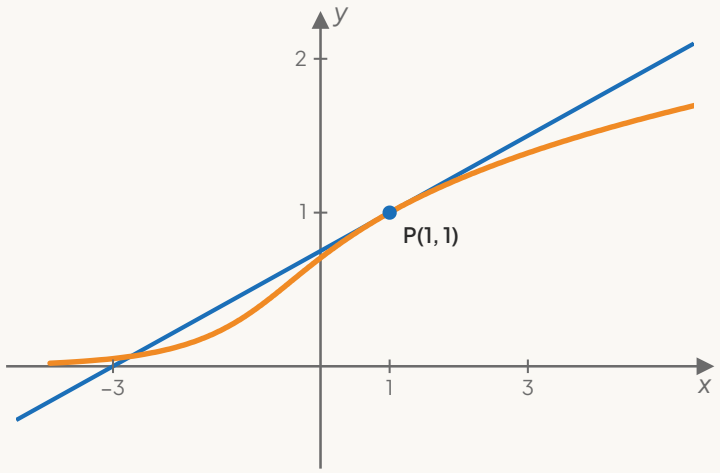
Questa è la formula per $n+1$. Per il principio di induzione l'uguaglianza vale per ogni $n \geq 1$. $\square$

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

1. **Invertibilità.** Il dominio è $(0, +\infty)$ e $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0$ per ogni $x > 0$. Quindi f è strettamente crescente, dunque iniettiva, dunque invertibile sulla sua immagine (che è $\mathbb{R}$, perché $f \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e $f \to +\infty$ per $x \to +\infty$).
2. **Il punto P.** Cerchiamo $f^{-1}(1)$, cioè il valore x_0 con $f(x_0) = 1$. Si vede subito che $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$; per l'iniettività è l'unico, quindi $f^{-1}(1) = 1$ e $P = (1, 1)$.
3. **Pendenza.** Per la formula della derivata dell'inversa:
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$
4. **Retta tangente.** $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$, cioè $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. Interseca gli assi in $(0, \frac{3}{4})$ e in $(-3, 0)$.

RISULTATO

$$y = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$$



In arancione f^{-1}, in blu la retta tangente in $P = (1, 1)$.

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1. **Dominio.** Serve $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ con $x \neq -3$. Tabella dei segni: numeratore positivo per $x > 1$, denominatore positivo per $x > -3$. Il rapporto è ≥ 0 per $x < -3$ oppure $x \geq 1$. Dominio: $(-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.
2. **Segno e zeri.** $g \geq 0$ ovunque (è una radice); $g(x) = 0$ solo per $x = 1$.
3. **Limiti e asintoti.** Poiché $\frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$, per $x \to \pm\infty$ si ha $g \to 1$: asintoto orizzontale $y = 1$ (da sopra a $-\infty$, da sotto a $+\infty$). Per $x \to -3^-$ il radicando tende a $+\infty$, quindi $g \to +\infty$: asintoto verticale $x = -3$.
4. **Derivata prima.** Posto $r(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $r'(x) = \frac{4}{(x+3)^2}$, quindi $g'(x) = \dfrac{r'(x)}{2\sqrt{r(x)}} = \dfrac{2}{(x+3)^2\sqrt{r(x)}} > 0$ in tutto il dominio (escluso $x = 1$). g è strettamente crescente su ciascuno dei due rami; non ci sono massimi o minimi interni.
5. **Punto $x = 1$.** Qui $g(1) = 0$ e $g'(x) \to +\infty$ per $x \to 1^+$: il grafico parte dall'asse con **tangente verticale**.
6. **Grafico.** Ramo sinistro: crescente da $y = 1$ (a $-\infty$) fino a $+\infty$ in $x = -3$. Ramo destro: crescente da $(1, 0)$ verso $y = 1$ senza raggiungerlo.

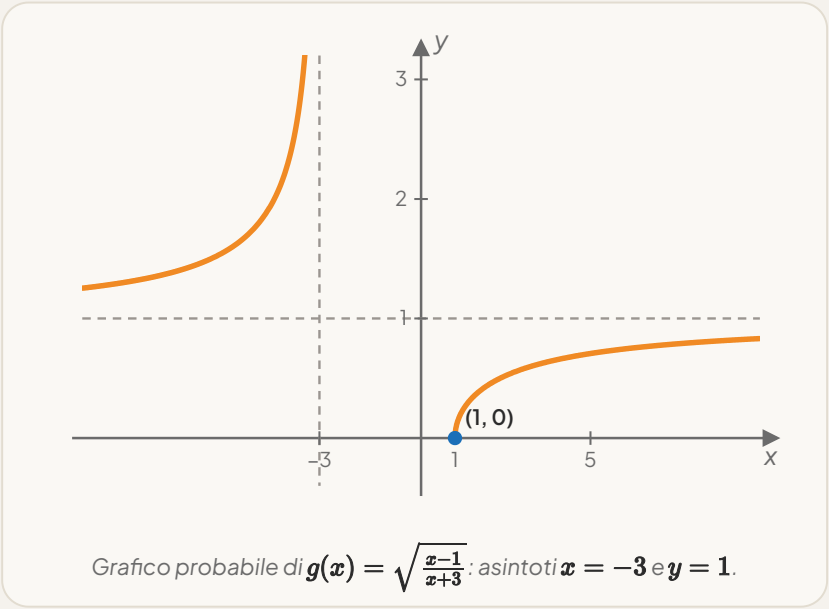


Grafico probabile di $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$: asintoti $x = -3$ e $y = 1$.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

Calcoliamo le derivate: $h'(x) = -2ax\,e^{-ax^2}$ e

$$h''(x) = -2a\,e^{-ax^2} + 4a^2x^2e^{-ax^2} = 2a\,(2ax^2 - 1)\,e^{-ax^2}.$$

Condizione di flesso in $x = 1$. Serve $h''(1) = 0$, cioè $2a(2a - 1)e^{-a} = 0$, quindi $a = 0$ oppure $a = \frac{1}{2}$. Con $a = 0$ la funzione è costante ($h = 1 + b$) e non ha flessi: si scarta. Con $a = \frac{1}{2}$ si ha $h''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$, che cambia segno in $x = 1$ (negativa per $0 \leq x < 1$, positiva per $x > 1$): è davvero un flesso.

Passaggio per $P = (0; 3)$. $h(0) = e^0 + b = 1 + b = 3$, quindi $b = 2$.

RISULTATO

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2, \qquad h(x) = e^{-x^2/2} + 2.$$

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

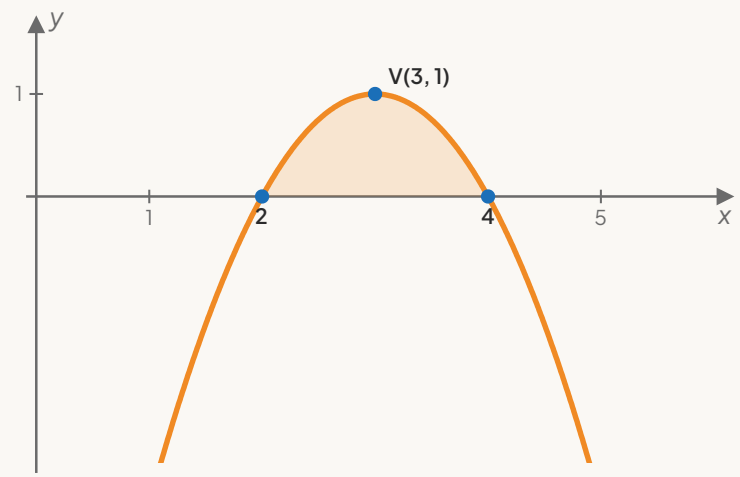
È una parabola con concavità verso il basso. Intersezioni con l'asse x:
$-x^2 + 6x - 8 = 0 \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff x = 2,\ x = 4$. Vertice: $x_V = -\frac{b}{2a} = 3$,
$f(3) = -9 + 18 - 8 = 1$, quindi $V = (3, 1)$. Intersezione con l'asse y: $f(0) = -8$.

Tra $x = 2$ e $x = 4$ la parabola sta sopra l'asse x ($f \geq 0$), quindi l'area è l'integrale di f su $[2, 4]$:

$$A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right]_2^4 = \left(-\frac{64}{3} + 48 - 32\right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16\right)$$
$$= -\frac{16}{3} - \left(-\frac{20}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

RISULTATO

$$A = \frac{4}{3}$$



Regione tra la parabola e l'asse x, per $2 \leq x \leq 4$.