INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

ANALISI MATEMATICA · PROVA SCRITTA

Tema d'esame 3

Induzione, limiti, studio di funzione, integrali

Nome e cognome _____ Data _____

ESERCIZIO 1

Dire se la composta di funzioni strettamente decrescenti è ancora strettamente decrescente, motivando adeguatamente la risposta.

ESERCIZIO 2

Calcolare la derivata della seguente funzione

$$g(x) = \ln\cos(x^2) + e^{\sin x}$$

ESERCIZIO 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

e disegnarne il grafico probabile. (Si trovino anche eventuali flessi).

ESERCIZIO 4

Determinare il valore del parametro reale k per il quale la funzione

$$f_k(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + kx - k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

soddisfi nell'intervallo $[0, 2]$ le ipotesi del teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 6}\, dx$$

TEMA D'ESAME 3

Soluzioni commentate

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE

Risposta: no. La composta di due funzioni strettamente decrescenti è strettamente **crescente**.

Dimostrazione. Siano f e g strettamente decrescenti e $h = f \circ g$. Prendiamo $x_1 < x_2$ nel dominio di h.

1. Poiché g è strettamente decrescente: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; g(x_1) > g(x_2)$.
2. Poiché f è strettamente decrescente, applicata a due punti in ordine invertito li riporta in ordine diretto: $g(x_1) > g(x_2) \;\Rightarrow\; f(g(x_1)) < f(g(x_2))$.
3. Quindi $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$: h è strettamente crescente. □

> Esempio: $f(x) = g(x) = -x$ sono strettamente decrescenti, ma $f(g(x)) = x$ è strettamente crescente. In generale, ogni "inversione di ordine" cambia il verso della monotonia: due inversioni si annullano.

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

Deriviamo i due addendi separatamente con la regola della funzione composta (il dominio richiede $\cos(x^2) > 0$).

Primo addendo. $\dfrac{d}{dx} \ln \cos(x^2) = \dfrac{1}{\cos(x^2)} \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x = -2x \tan(x^2).$

Secondo addendo. $\dfrac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \cdot \cos x.$

> **RISULTATO**
> $g'(x) = -2x \tan(x^2) + \cos x \, e^{\sin x}.$

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1. **Dominio e simmetrie.** Il denominatore è sempre positivo: dominio $\mathbb{R}$. Inoltre $f(-x) = -f(x)$: la funzione è **dispari**, basta studiarla per $x \geq 0$ e poi riflettere rispetto all'origine.
2. **Segno.** Ha lo stesso segno di x; l'unico zero è $x = 0$.
3. **Limiti e asintoti.** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$: asintoto orizzontale $y = 0$ (da sopra a $+\infty$, da sotto a $-\infty$). Nessun asintoto verticale.
4. **Derivata prima.** $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$. Positiva per $-1 < x < 1$, negativa fuori. Quindi $x = -1$ è un minimo, con $f(-1) = -\frac{1}{2}$, e $x = 1$ è un massimo, con $f(1) = \frac{1}{2}$.
5. **Derivata seconda.** $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Si annulla per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$. Il segno è quello di $x(x^2-3)$: negativa per $x < -\sqrt{3}$, positiva per $-\sqrt{3} < x < 0$, negativa per $0 < x < \sqrt{3}$,

positiva per $x > \sqrt{3}$.

6. **Flessi.** f'' cambia segno in tutti e tre i punti: flessi in $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ e $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (circa $\pm 0{,}43$ di ordinata).

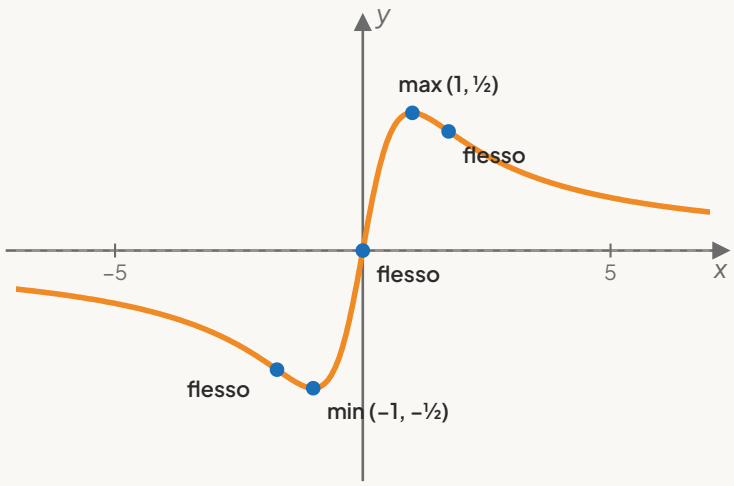


Grafico probabile di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$: funzione dispari, asintoto $y = 0$.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

Ipotesi di Lagrange. Serve f_k continua su $[0,2]$ e derivabile su $(0,2)$. Ciascun ramo è un polinomio, quindi il problema è solo in $x = 1$.

Continuità in $x = 1$. $f_k(1^-) = 1^3 = 1$ e $f_k(1^+) = 1 + k - k = 1$: coincidono per ogni k.

Derivabilità in $x = 1$. La derivata del primo ramo in 1 vale $3x^2\big|_{x=1} = 3$; quella del secondo ramo vale $2x + k\big|_{x=1} = 2 + k$. Imponendo l'uguaglianza: $3 = 2 + k$, quindi $k = 1$.

Tesi. Con $k = 1$ il secondo ramo è $x^2 + x - 1$. Allora $f(0) = 0$, $f(2) = 4 + 2 - 1 = 5$ e cerchiamo $c \in (0,2)$ con

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5}{2}.$$

Sul ramo $(0,1)$: $3c^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0{,}91$, che appartiene a $(0,1)$: accettabile. Sul ramo $(1,2)$: $2c + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{4}$, che **non** appartiene a $(1,2)$: scartato.

RISULTATO

$k = 1$, e il punto è $c = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0{,}91$.

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

Il denominatore si fattorizza: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Scomponiamo in fratti semplici cercando A e B tali che

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \iff 1 = A(x+2) + B(x-3).$$

Per $x = 3$: $1 = 5A$, quindi $A = \frac{1}{5}$. Per $x = -2$: $1 = -5B$, quindi $B = -\frac{1}{5}$. Allora

$$\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{5}(\ln|x-3|-\ln|x+2|)+c.$$

RISULTATO

$$\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+c.$$