INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

ANALISI MATEMATICA · PROVA SCRITTA

Tema d'esame 4

Induzione, limiti, studio di funzione, integrali

Nome e cognome _____ Data _____

ESERCIZIO 1

Dimostrare per induzione che

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall n \geq 1.$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il valore del seguente limite utilizzando i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)\sin(3x)}{x \ln(1+x)}$$

ESERCIZIO 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

e disegnarne il grafico probabile. (Si trovino anche eventuali flessi).

ESERCIZIO 4

Determinare i punti singolari della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

e specificarne il tipo.

ESERCIZIO 5

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x$ e determinare l'area della regione di piano compresa tra tale grafico e l'asse delle ascisse.

Soluzioni commentate

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE

Base ($n = 1$). $1! = 1$ e $2^0 = 1$, quindi $1 \geq 1$. Vera.

Passo induttivo. Supponiamo $n! \geq 2^{n-1}$ per un certo $n \geq 1$. Allora

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \;\geq\; (n+1) \cdot 2^{n-1} \;\geq\; 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

dove la prima disuguaglianza usa l'ipotesi induttiva e la seconda il fatto che $n + 1 \geq 2$ per $n \geq 1$. Abbiamo ottenuto $(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1}$, cioè la tesi per $n + 1$. $\square$

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

Forma $\frac{0}{0}$. Usiamo $\frac{e^t - 1}{t} \to 1$, $\frac{\sin t}{t} \to 1$ e $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ per $t \to 0$, completando ciascun fattore con il suo argomento:

$$\frac{(e^{2x} - 1)\sin(3x)}{x \ln(1+x)} = \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1} \cdot \frac{2x \cdot 3x}{x \cdot x}.$$

L'ultimo fattore vale $\frac{6x^2}{x^2} = 6$ per ogni $x \neq 0$.

RISULTATO

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)\sin(3x)}{x \ln(1+x)} = 6.$$

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1. **Dominio e segno.** Serve $x > 0$: dominio $(0, +\infty)$. Il segno è quello di $\ln x$: negativa per $0 < x < 1$, nulla in $x = 1$, positiva per $x > 1$.
2. **Limiti e asintoti.** Per $x \to 0^+$: $\ln x \to -\infty$ e $\frac{1}{x} \to +\infty$, quindi $f \to -\infty$: asintoto verticale $x = 0$. Per $x \to +\infty$: il logaritmo cresce meno di ogni potenza, quindi $f \to 0^+$: asintoto orizzontale $y = 0$.
3. **Derivata prima.** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Positiva per $x < e$, negativa per $x > e$. Quindi f cresce fino a $x = e$ e poi decresce: **massimo** in $x = e$ con $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$.
4. **Derivata seconda.** $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$. Si annulla per $\ln x = \frac{3}{2}$, cioè $x = e^{3/2} \approx 4{,}48$. Per $x < e^{3/2}$ è negativa (concava), per $x > e^{3/2}$ è positiva (convessa).
5. **Flesso.** In $x = e^{3/2}$ la concavità cambia: flesso con $f\left(e^{3/2}\right) = \frac{3}{2} e^{-3/2} \approx 0{,}33$.

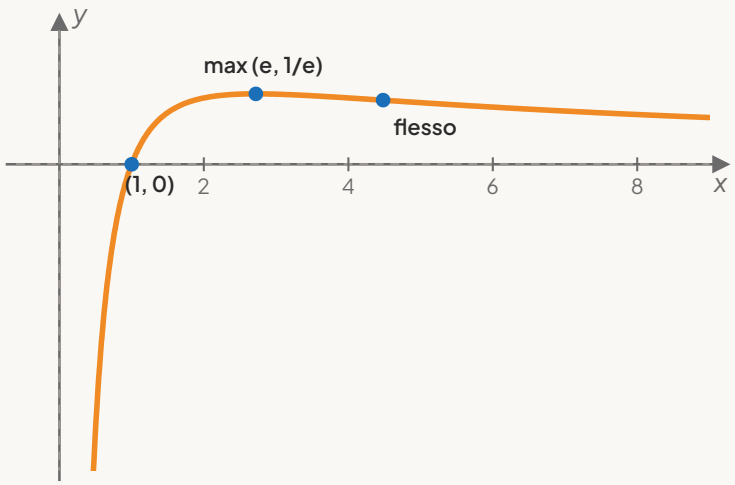


Grafico probabile di $f(x) = \frac{\ln x}{x}$: asintoti $x = 0$ e $y = 0$.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

La funzione è definita per $x \neq 0$ (il denominatore $1 + e^{1/x}$ è sempre maggiore di 1 quando esiste, dunque mai nullo). L'unico punto da studiare è $x = 0$: calcoliamo i limiti laterali.

Da destra ($x \to 0^+$): $\frac{1}{x} \to +\infty$, quindi $e^{1/x} \to +\infty$ e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0.$$

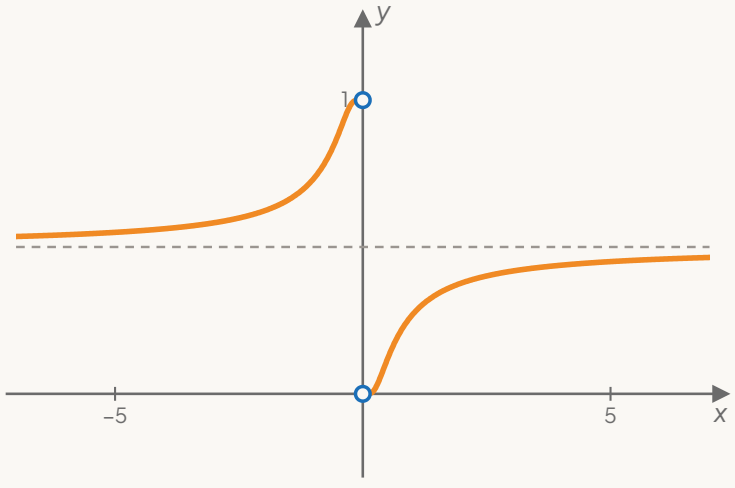
Da sinistra ($x \to 0^-$): $\frac{1}{x} \to -\infty$, quindi $e^{1/x} \to 0$ e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

I due limiti esistono finiti ma sono diversi: $x = 0$ è una discontinuità di **prima specie** (a salto), di ampiezza $|0 - 1| = 1$.

RISULTATO

$x = 0$ è l'unico punto singolare: salto di ampiezza 1.



Salto in $x = 0$: da 1 (sinistra) a 0 (destra). Asintoto $y = \frac{1}{2}$ a $\pm\infty$.

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

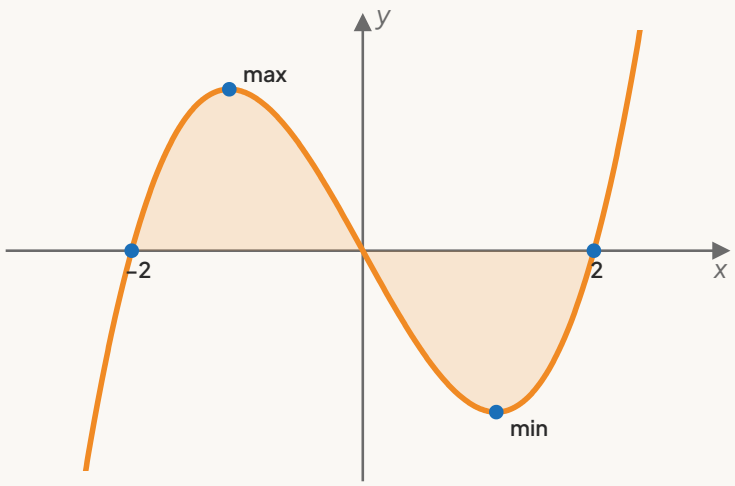
Grafico. $f(x) = x(x-2)(x+2)$ è dispari, con zeri in $x = -2, 0, 2$. Derivata: $f'(x) = 3x^2 - 4$, che si annulla in $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}15$: massimo in $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (con $f \approx 3{,}08$) e minimo in $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (con $f \approx -3{,}08$). Flesso in $x = 0$.

Area. Il grafico incontra l'asse x in -2, 0 e 2, quindi la regione è formata da **due parti**: su $[-2, 0]$ la funzione è positiva, su $[0, 2]$ è negativa. Non si può integrare in un colpo solo da -2 a 2 (le due parti si cancellerebbero, dando 0). Per simmetria le due aree sono uguali:

$$A = 2\int_0^2 \left|x^3 - 4x\right| dx = 2\int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = 2\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\,(8 - 4) = 8.$$

RISULTATO

$A = 8$



Le due regioni tra il grafico di f e l'asse x.