INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

ANALISI MATEMATICA · PROVA SCRITTA

Tema d'esame 5

Induzione, limiti, studio di funzione, integrali

Nome e cognome _____ Data _____

ESERCIZIO 1

Dimostrare per induzione che $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$.

ESERCIZIO 2

Dire se il prodotto di funzioni strettamente crescenti è ancora strettamente crescente, motivando adeguatamente la risposta.

ESERCIZIO 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

e disegnarne il grafico probabile. (Si trovino anche eventuali flessi).

ESERCIZIO 4

Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

abbia un flesso di ascissa $x = 1$ e un punto di minimo relativo in $x = 2$.

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int e^x \sin x \, dx$$

TEMA D'ESAME 5

Soluzioni commentate

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE

Chiamiamo $P(n)$ l'affermazione "$n^3 + 2n$ è multiplo di 3".

Base ($n = 1$). $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, multiplo di 3. Vera.

Passo induttivo. Supponiamo $n^3 + 2n = 3m$ con m intero. Sviluppiamo l'espressione per $n + 1$:

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = \underbrace{(n^3 + 2n)}_{=3m} + 3\,(n^2 + n + 1).$$

Entrambi gli addendi sono multipli di 3, quindi lo è la somma:
$(n+1)^3 + 2(n+1) = 3\,(m + n^2 + n + 1)$. Vale $P(n+1)$, e per il principio di induzione la proprietà vale per ogni $n \geq 1$. □

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

Risposta: no, in generale. Basta un controesempio.

Controesempio. $f(x) = g(x) = x$ su $\mathbb{R}$ sono strettamente crescenti, ma il prodotto $f(x)g(x) = x^2$ non lo è: $-2 < -1$ ma $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$ (su $(-\infty, 0)$ la parabola decresce).

Quando funziona. Se invece f e g sono strettamente crescenti **e positive**, il prodotto è strettamente crescente. Infatti, per $x_1 < x_2$:

$$f(x_1)g(x_1) \;<\; f(x_2)g(x_1) \;<\; f(x_2)g(x_2),$$

dove la prima disuguaglianza usa $f(x_1) < f(x_2)$ e $g(x_1) > 0$, la seconda usa $g(x_1) < g(x_2)$ e $f(x_2) > 0$. Il problema nasce quindi dal segno: moltiplicare per un numero negativo inverte le disuguaglianze.

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1. **Dominio e segno.** Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il numeratore è ≥ 0, quindi il segno è quello di $x - 1$: $f < 0$ per $x < 1$ (con $x \neq 0$), $f > 0$ per $x > 1$; unico zero $x = 0$.
2. **Limiti e asintoti.** $\lim_{x \to 1^-} f = -\infty$ e $\lim_{x \to 1^+} f = +\infty$: asintoto verticale $x = 1$. Per $x \to \pm\infty$ la funzione cresce come x; dividendo, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, quindi $y = x + 1$ è **asintoto obliquo** (il resto $\frac{1}{x-1} \to 0$).
3. **Derivata prima.** $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Positiva per $x < 0$ e $x > 2$, negativa per $0 < x < 2$ (con $x \neq 1$).
4. **Massimi e minimi.** $x = 0$ è un massimo relativo con $f(0) = 0$; $x = 2$ è un minimo relativo con $f(2) = 4$.
5. **Derivata seconda.** $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$. Non si annulla mai: **nessun flesso**. È negativa (concava) per $x < 1$ e positiva (convessa) per $x > 1$; il cambio di concavità avviene in $x = 1$, che non

appartiene al dominio.

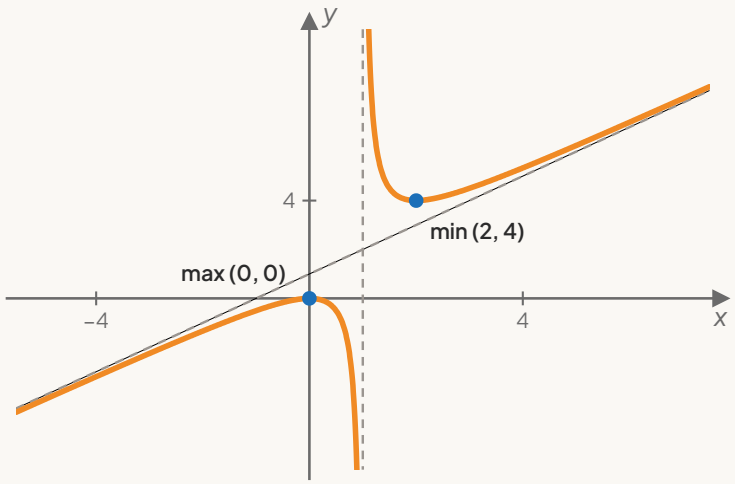


Grafico probabile di $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$*: asintoti* $x = 1$ *e* $y = x + 1$.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

Derivate: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e $f''(x) = 6x + 2a$.

Flesso in $x = 1$. Serve $f''(1) = 0$: $6 + 2a = 0$, quindi $a = -3$.

Punto stazionario in $x = 2$. Serve $f'(2) = 0$: $12 + 4a + b = 0$. Con $a = -3$: $12 - 12 + b = 0$, quindi $b = 0$.

Verifica. Con $a = -3$ e $b = 0$ si ha $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x(x-2)$, $f''(x) = 6x - 6$. In $x = 2$: $f''(2) = 6 > 0$, quindi è davvero un minimo. In $x = 1$: f'' passa da negativa a positiva, quindi è davvero un flesso.

RISULTATO

$$a = -3, \quad b = 0, \qquad f(x) = x^3 - 3x^2.$$

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

Integriamo per parti due volte; indichiamo con I l'integrale cercato. Prima volta: $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, quindi $du = \cos x\,dx$, $v = e^x$.

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Seconda volta, sull'integrale rimasto: $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$, quindi $du = -\sin x\,dx$, $v = e^x$.

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + I.$$

Sostituendo: $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$. Ritroviamo I al secondo membro: portiamolo a sinistra, $2I = e^x(\sin x - \cos x)$.

RISULTATO

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x\,(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$