UNIVERSITÀ · DISPENSA

Matematica finanziaria

Leggi finanziarie · scindibilità · rendite a rata costante · flussi di cassa (DCF, VAN, TIR) · ammortamenti

INFOMAAT
Centro di ripetizioni · Andrea Paone
infomaat.it

INDICE

Matematica finanziaria

1 Leggi finanziarie 3

2 Scindibilità 7

3 Leggi finanziarie in due variabili 8

4 Rendite a rata costante 9

5 Flussi di cassa: DCF, VAN e tasso interno 10

6 Ammortamenti 12

1 Leggi finanziarie

Una **operazione finanziaria** sposta una somma di denaro nel tempo. Le due operazioni di base sono la **capitalizzazione** (spostare in avanti una disponibilità di oggi) e l'**attualizzazione** (anticipare a oggi una somma futura). Sono regolate da **leggi finanziarie**: l'interesse semplice, l'interesse composto e lo sconto commerciale.

CAPITALIZZAZIONE

Posticipare una disponibilità monetaria

Con C indichiamo il capitale investito al tempo $t = 0$ e con M il **montante** prelevato al tempo t. Il legame è dato dal **fattore montante** $f(t)$:

MONTANTE

$$M = C \cdot f(t) = C + I$$

dove I è l'interesse maturato. La funzione $f(t)$ è detta fattore montante.

ATTUALIZZAZIONE

Anticipare una disponibilità monetaria futura

Con S indichiamo il valore nominale a scadenza e con A il **valore attuale** (o scontato). Il legame è dato dal **fattore di sconto** $\varphi(t)$:

VALORE ATTUALE

$$A = S \cdot \varphi(t) = S - D$$

dove D è lo sconto. Il fattore montante f e il fattore di sconto φ si dicono **coniugati** quando $f(t) \cdot \varphi(t) = 1$.

Una legge finanziaria di capitalizzazione deve rispettare due condizioni: $f(0) = 1$ e $f(t) > 0 \ \ \forall t$. Indichiamo con i il tasso d'interesse annuo e con d il tasso di sconto annuo.

Legge	Fattore montante	Fattore di sconto
Interesse semplice	$1 + it$	$\dfrac{1}{1 + it}$
Interesse composto	$(1 + i)^t$	$\dfrac{1}{(1 + i)^t}$
Sconto commerciale	$\dfrac{1}{1 - dt}$	$1 - dt$

Lo sconto commerciale nasce come un contratto che pattuisce uno sconto $D = d \cdot t \cdot S$ proporzionale sia al valore nominale a scadenza S sia alla durata t, con costante di proporzionalità d. Per questo è spesso chiamato **interesse semplice anticipato**.

TASSI PERIODALI EQUIVALENTI

Frazionare l'anno

Se vogliamo dividere l'anno in m parti uguali (ad esempio $m = 6$ rate bimestrali, $m = 2$ rate semestrali) cerchiamo il tasso periodale equivalente a quello annuo.

TASSI PERIODALI

$$\text{semplice:}\quad i_m = \frac{i}{m},\quad d_m = \frac{d}{m} \qquad\qquad \text{composto:}\quad i_m = (1+i)^{1/m} - 1,\quad i = (1+i_m)^m - 1$$

TASSO ANNUO NOMINALE (TAN)

Il tasso annuo nominale convertibile m volte l'anno, j_m, è definito da $j_m = m \cdot i_m$, da cui:

TAN

$$j_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right] \quad\Longleftrightarrow\quad i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$$

Il TAN è l'approssimazione lineare del tasso composto annuo effettivo i.

INTENSITÀ ISTANTANEA D'INTERESSE

L'intensità istantanea misura il tasso di crescita relativo del montante:

INTENSITÀ ISTANTANEA

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\ln f(t) \quad\Longleftrightarrow\quad f(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,ds}$$

Legge	Intensità istantanea
Interesse semplice	$\dfrac{i}{1+it}$
Interesse composto	$\ln(1+i)$ (costante)
Sconto commerciale	$\dfrac{d}{1-dt}$

ESERCIZIO 1.1

Un'azienda possiede BOT per un ammontare complessivo di 400.000 €. La metà scade fra 5 mesi e l'altra metà fra 11 mesi. Se il tasso di rendimento per la prima parte è $i_1 = 3\%$ e per la seconda $i_2 = 4{,}1\%$, qual è il prezzo di mercato a cui può venderli oggi? I BOT si valutano in capitalizzazione semplice.

SVOLGIMENTO

Attualizziamo 400.000 € (divisi in due metà) con il tempo espresso in anni: $\frac{5}{12}$ e $\frac{11}{12}$.

$$A = \frac{200{,}000}{1 + 0.03 \cdot 5/12} + \frac{200{,}000}{1 + 0.041 \cdot 11/12} = 390{,}286 \text{ €}$$

A ≈ 390.286 €

ESERCIZIO 1.2

Un'azienda ottiene da una banca un finanziamento di 50.000 € al tasso annuo semplice $i = 5\%$ e si impegna a ripagarlo in 4 rate costanti R pagate a 3, 6, 9 e 12 mesi. Qual è l'importo della singola rata?

SVOLGIMENTO

Imponiamo che il valore attuale delle 4 rate eguagli il prestito:

$$R\left(\frac{1}{1 + 0.05 \cdot 3/12} + \frac{1}{1 + 0.05 \cdot 6/12} + \frac{1}{1 + 0.05 \cdot 9/12} + \frac{1}{1 + 0.05 \cdot 12/12}\right) = 50{,}000$$

$$R = \frac{50{,}000}{3.8795} = 12{,}888{,}26$$

R ≈ 12.888,26 €

ESERCIZIO 1.3

Un investitore desidera avere fra 4 anni un capitale di $M = 10{,}000$ €. Investe subito 6.000 € e farà un ulteriore versamento C tra un anno. Con capitalizzazione composta al tasso annuo $i = 11\%$, determina il secondo importo per centrare l'obiettivo.

SVOLGIMENTO

I due versamenti capitalizzano rispettivamente per 4 e per 3 anni:

$$6000\,(1.11)^4 + C\,(1.11)^3 = 10{,}000 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{10{,}000 - 6000\,(1.11)^4}{(1.11)^3}$$

C ≈ 651,91 €

ESERCIZIO 1.4

Un mutuo di ammontare $S = 200{,}000$ € verrà ripagato nei prossimi 4 semestri con rate costanti. Il tasso d'interesse annuo composto è $i = 15\%$. Determina l'importo della rata.

SVOLGIMENTO

Trasformiamo i semestri in anni ($\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2) e attualizziamo le rate a tasso composto:

$$200{,}000 = \frac{R}{(1.15)^{1/2}} + \frac{R}{(1.15)} + \frac{R}{(1.15)^{3/2}} + \frac{R}{(1.15)^2}$$

$$R = \frac{200{,}000}{3.3691} = 59{,}363{,}25$$

R ≈ 59.363,25 €

ESERCIZIO 1.5

Dato un tasso d'interesse annuo $i = 10\%$, calcola il tasso bimestrale i_6 e il tasso semestrale i_2 equivalenti.

SVOLGIMENTO

Dalla formula dei tassi composti equivalenti $i_m = (1+i)^{1/m} - 1$:

$$i_6 = (1.10)^{1/6} - 1 = 1{,}60\% \qquad i_2 = (1.10)^{1/2} - 1 = 4{,}88\%$$

$i_6 \approx 1{,}60\%$ $i_2 \approx 4{,}88\%$

ESERCIZIO 1.6

Un prestito di 2.000 € deve essere ripagato in 4 rate trimestrali costanti, con TAN del finanziamento pari al 12,5%. Calcola la rata.

SVOLGIMENTO

Il tasso composto trimestrale (periodale) coerente con il TAN è $i_4 = \frac{0.125}{4} = 0.03125$.

L'esponente non è in anni ma in trimestri, perché il tasso è trimestrale:

$$\frac{R}{1+0.03125} + \frac{R}{(1.03125)^2} + \frac{R}{(1.03125)^3} + \frac{R}{(1.03125)^4} = 2000$$

$$R = \frac{2000}{3.70601} = 539{,}66$$

R ≈ 539,66 €

ERRORE COMUNE **Il TAN non è il tasso annuo effettivo**

Sbagliato Usare $(1+0{,}125)^{1/4}$ come fattore "diretto" → R = 537,90 €

Corretto Tasso annuo effettivo $i=(1{,}03125)^4-1=13{,}0982\%$ → $(1+i)^{1/4}=(1{,}03125)^1$ → R = 539,66 €

Si potrebbe ripetere l'esercizio "in anni", ma **non** usando il TAN come base della potenza: il TAN del 12,5% è **nominale**, non effettivo. Il tasso annuo **effettivo** equivalente è $i=(1+\frac{j_4}{4})^4-1=13{,}0982\%$. Solo con questo $(1+i)^{k/4}=(1{,}03125)^k$ e si ritrova 539,66 €. Usando invece $(1{,}125)^{k/4}$ si ottiene 537,90 €, che è errato.

ESERCIZIO 1.7

Una legge finanziaria a interessi semplici è $f(t)=1+i(t)\cdot t$ con $i(t)=0{,}05+0{,}03\,t$. Calcola il montante di un capitale di 5.000 € impiegato per 5 anni e l'intensità istantanea d'interesse in $t=4$.

SVOLGIMENTO

In $t=5$: $i(5)=0.05+0.03\cdot 5=0.2$, quindi $M=5000\,(1+0.2\cdot 5)=10{,}000$ €.

Esplicitiamo $f(t)=1+(0.05+0.03t)\,t=0.03t^2+0.05t+1$. Allora:

$$\delta(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{0.06t+0.05}{0.03t^2+0.05t+1}\quad\Rightarrow\quad\delta(4)=\frac{0.29}{1.68}=0{,}1726$$

M = 10.000 € δ(4) ≈ 0,1726

ESERCIZIO 1.8

Si consideri un'intensità istantanea d'interesse $\delta(t)=0{,}05-0{,}01\,t$. Deducine il fattore di capitalizzazione $f(t)$.

SVOLGIMENTO

$$f(t)=e^{\int_0^t(0.05-0.01s)\,ds}=e^{\,[\,0.05s-0.005s^2\,]_0^t}=e^{\,0.05t-0.005t^2}$$

f(t) = e^(0,05t − 0,005t²)

2 Scindibilità

Una legge finanziaria a una variabile si dice **scindibile** se spezzare l'operazione in due tratti consecutivi e poi ricomporli dà lo stesso risultato del tratto unico.

DEFINIZIONE

Scindibilità (una variabile)

Una legge è scindibile se $f(t+\tau)=f(t)\cdot f(\tau)$ per ogni $t,\tau\geq 0$.

Questa proprietà caratterizza l'**interesse composto**: solo la legge esponenziale $f(t) = (1+i)^t$ la soddisfa. L'interesse semplice e lo sconto commerciale **non** sono scindibili.

3 Leggi finanziarie in due variabili

Una legge in due variabili $F(x,y)$ capitalizza dalla data x alla data y. Valgono le condizioni:

CONDIZIONI

$$F(x,y)\cdot\Phi(x,y)=1, \qquad F(x,x)=1, \quad \Phi(x,x)=1, \qquad F(x,y)>0,\ \Phi(x,y)>0$$

L'intensità istantanea d'interesse si calcola derivando rispetto alla seconda variabile:

INTENSITÀ (DUE VARIABILI)

$$\delta(x,y)=\frac{F'_y(x,y)}{F(x,y)}=\frac{\partial}{\partial y}\ln F(x,y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x,y)=e^{\int_x^y \delta(x,t)\,dt}$$

DEFINIZIONE

Teorema di Cantelli

Sia $F(x,y)$ una legge di capitalizzazione derivabile con continuità rispetto a y. Allora F è scindibile se e solo se la sua intensità istantanea $\delta(x,y)$ **non dipende da** x, cioè $\delta(x,y)=\delta(y)$.

DEFINIZIONE

Teorema della scindibilità del prodotto

Una legge $F(x,y)$ è scindibile se e solo se esiste una funzione f tale che $F(x,y)=\dfrac{f(y)}{f(x)}$. Se il fattore montante è scindibile, lo è anche il fattore di sconto coniugato.

ESERCIZIO 3.1

Si consideri la legge in due variabili con fattore montante $F(x,y)=\dfrac{50-x}{50-y}$. Calcola il montante di un capitale di 3.000 € impiegato dalla data 2 alla data 7; determina poi $\delta(x,y)$ e stabilisci se la legge è scindibile.

SVOLGIMENTO

Montante: $M = 3000 \cdot F(2,7) = 3000 \cdot \dfrac{50-2}{50-7} = 3000 \cdot \dfrac{48}{43} = 3348{,}84$ €.

Intensità istantanea: $\delta(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\ln\left(\dfrac{50-x}{50-y}\right) = \dfrac{1}{50-y}$.

Poiché δ dipende solo da y, per il teorema di Cantelli la legge è **scindibile** (infatti $F(x,y)=\frac{f(y)}{f(x)}$ con $f(t)=50-t$).

M ≈ 3.348,84 € δ(x,y)=1/(50−y) scindibile

4 Rendite a rata costante

Investimenti e finanziamenti sono caratterizzati dallo scambio di una somma con una **rendita**, cioè una sequenza di rate R. Una rendita è **posticipata** se la rata scade alla fine del periodo, **anticipata** se all'inizio; **temporanea** se le rate sono in numero finito, **perpetua** se infinito. Consideriamo rate costanti a tasso composto annuo i.

RENDITA TEMPORANEA ANNUA

Valore attuale e montante

Il valore attuale A è calcolato un anno prima della scadenza della prima rata (in $t=0$); il montante M in corrispondenza dell'ultima rata (in $T=n$).

POSTICIPATA

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad M = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

ANTICIPATA

$$A = R\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad M = R\,(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

RENDITE PERPETUE ANNUE

PERPETUE

$$\text{posticipata: } A=\frac{R}{i} \qquad \text{anticipata: } A = R\,\frac{1+i}{i}$$

RENDITE FRAZIONARIE

m rate l'anno

Con m rate l'anno di periodicità $1/m$, su n anni il numero totale di rate è $N = m \times n$. Si riusano le formule viste, sostituendo all'unità temporale il tasso periodale equivalente $i_m = (1+i)^{1/m} - 1$:

FRAZIONARIA POSTICIPATA

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i_m} \qquad M = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i_m}$$

ESERCIZIO 4.1

Una banca presta una somma a un cliente, che si impegna a ripagarla con rate annuali posticipate di 10.000 € per 12 anni. Con tasso composto $i = 8{,}5\%$, calcola la somma finanziata A.

SVOLGIMENTO

Si tratta di un'attualizzazione di rate posticipate annue:

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10{,}000 \cdot \frac{1-(1.085)^{-12}}{0.085} = 73{,}446{,}86$$

A ≈ 73.446,86 €

ESERCIZIO 4.2

Una famiglia versa 6.000 € all'inizio di ogni anno per 18 anni per il proprio figlio, al tasso composto del 6%. Calcola il montante finale al 18° anno e quale dovrebbe essere la rata per ottenere 250.000 €.

SVOLGIMENTO

Costituzione di capitale con rate anticipate:

$$M = R(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 6000\,(1.06)\,\frac{(1.06)^{18}-1}{0.06} = 196{,}559{,}95$$

Se l'obiettivo fosse 250.000 €, invertendo la formula: $R = \dfrac{250{,}000}{(1.06)\,\frac{(1.06)^{18}-1}{0.06}} = 7631{,}26$.

M ≈ 196.559,95 € R(250k) ≈ 7.631,26 €

5 Flussi di cassa: DCF, VAN e tasso interno

Chiamiamo **flussi di cassa** la sequenza di entrate e uscite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ alle scadenze $t_0, t_1, \ldots, t_n$ che caratterizzano un'operazione finanziaria. Fissata una coppia di fattori f e φ coniugati, valutiamo l'operazione:

VALORE IN T

$$V(t) = \sum_{t_s \le t} a_s \, f(t - t_s) + \sum_{t_s > t} a_s \, \varphi(t_s - t)$$

In $t = 0$ otteniamo il valore attuale $V(0) = A = \sum a_s \, \varphi(t_s)$; in $t = T$ il montante $V(T) = M = \sum a_s \, f(T - t_s)$.

DCF, TASSO INTERNO E VAN

Il **Discounted Cash Flow** in funzione del tasso x è $G(x) = \sum_s a_s \, (1+x)^{-t_s}$. Il suo grafico ha un asintoto verticale in $x = -1$ e un asintoto orizzontale $y = a_0$.

DEFINIZIONE

Tasso interno

Ogni soluzione $x^* > -1$ dell'equazione $G(x) = \sum_s a_s \, (1+x)^{-t_s} = 0$ è detta **tasso interno** dell'operazione. È sempre un tasso composto annuo. Negli investimenti è il **TIR** (Tasso Interno di Rendimento, o IRR); il **TAEG** di un finanziamento è un tasso interno.

Il **Valore Attuale Netto** (VAN, o NPV) a un dato tasso i è $\mathrm{VAN}(i) = G(x)\big|_{x=i}$.

ESERCIZIO 5.1

Un'impresa dispone di tre crediti di ammontare $C_1 = 1000, C_2 = 2000, C_3 = 3000$ con scadenze a 1, 2 e 3 mesi. Una banca è disposta ad acquistarli al valore scontato a sconto commerciale annuo $d = 9\%$. Calcola il valore attuale e verifica se il costo del finanziamento supera il 12% annuo composto.

SVOLGIMENTO

Valore attuale (sconto commerciale), tempo in anni:

$$A = 1000\left(1 - 0.09\tfrac{1}{12}\right) + 2000\left(1 - 0.09\tfrac{2}{12}\right) + 3000\left(1 - 0.09\tfrac{3}{12}\right) = 5895$$

Dal punto di vista della banca i flussi sono $a_0 = -5895$ e poi $+1000, +2000, +3000$. Il DCF è:

$$G(x) = -5895 + \frac{1000}{(1+x)^{1/12}} + \frac{2000}{(1+x)^{2/12}} + \frac{3000}{(1+x)^{3/12}}$$

Valutando in $x = 0{,}12$: $G(0.12) = -25{,}63 < 0$. Poiché G è decrescente, il tasso interno (dove $G = 0$) è **minore del 12%**.

A = 5.895 € G(0,12) = −25,63 < 0 ⇒ TIR < 12%

ESERCIZIO 5.2

Un'impresa ha in portafoglio due cambiali che scadono fra 3 e 6 mesi, ciascuna di 2.000 €. Le cede a una banca che riconosce un valore attuale a sconto commerciale con tasso annuo $d = 8\%$. Calcola A, scrivi il DCF dal punto di vista della banca e determina il tasso interno.

SVOLGIMENTO

$$A = 2000\left(1 - 0.08\tfrac{3}{12}\right) + 2000\left(1 - 0.08\tfrac{6}{12}\right) = 3880$$

$$G(x) = -3880 + \frac{2000}{(1+x)^{3/12}} + \frac{2000}{(1+x)^{6/12}} = 0$$

Ponendo $t = (1+x)^{1/4}$ (così $(1+x)^{1/2} = t^2$) si ottiene $-3880 + \dfrac{2000}{t} + \dfrac{2000}{t^2} = 0$, cioè

$$3880\,t^2 - 2000\,t - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}020549 \quad \Rightarrow \quad x^* = t^4 - 1 = 8{,}476\%$$

A = 3.880 € TIR x* ≈ 8,476%

6 Ammortamenti

Consideriamo un prestito di una somma S da rimborsare in T anni. Oltre alla restituzione del capitale dobbiamo aggiungere gli interessi. La restituzione può avvenire in tre modi: **(a)** in un'unica soluzione sia del capitale sia degli interessi; **(b)** in un'unica soluzione del capitale e graduale degli interessi; **(c)** graduale sia degli interessi sia del capitale — è il vero e proprio **ammortamento**.

STRUTTURA DELLA RATA

Ogni rata R_k è somma di una **quota capitale** C_k e di una **quota interessi** I_k:

RATA

$$R_k = C_k + I_k$$

Il **debito residuo** D_k dopo la k-esima rata, le quote interessi e (nel caso di rate annue) le loro forme semplificate sono:

DEBITO RESIDUO E QUOTE INTERESSI

$$D_k = S - \sum_{s=1}^{k} C_s = \sum_{s=k+1}^{n} R_s\,(1+i)^{k-s}, \qquad D_k = D_{k-1}(1+i) - R_k$$

$$I_k = D_{k-1}\left[(1+i)^{t_k - t_{k-1}} - 1\right] \xrightarrow{\text{rate annue}} I_k = D_{k-1}\cdot i$$

AMMORTAMENTO UNIFORME (ITALIANO)

Quote capitale costanti

È caratterizzato da quote capitale costanti $C_k = C$. Dalla condizione di chiusura $\sum_{k=1}^{n} C_k = S$ si ottiene:

ITALIANO

$$C = \frac{S}{n}, \qquad D_k = S\,\frac{n-k}{n}, \qquad I_k = i\,D_{k-1}, \qquad R_k = \frac{S}{n} + i\,S\,\frac{n-k+1}{n}$$

Le quote interessi calano nel tempo (il debito residuo diminuisce in modo costante), quindi **le rate sono decrescenti**.

ESERCIZIO 6.1

Un prestito $S = 10{,}000$ € va ammortizzato in $n = 5$ anni al tasso annuo composto $i = 8\%$ con il metodo italiano. Costruisci il piano di ammortamento.

SVOLGIMENTO

Quota capitale costante: $C = \dfrac{10{,}000}{5} = 2000$ €. Le quote interessi si calcolano su D_{k-1}:

PIANO DI AMMORTAMENTO — METODO ITALIANO

k	D_{k-1}	I_k	C_k	R_k	D_k
1	10.000,00	800,00	2.000,00	2.800,00	8.000,00
2	8.000,00	640,00	2.000,00	2.640,00	6.000,00
3	6.000,00	480,00	2.000,00	2.480,00	4.000,00
4	4.000,00	320,00	2.000,00	2.320,00	2.000,00
5	2.000,00	160,00	2.000,00	2.160,00	0,00
Σ	**—**	**2.400,00**	**10.000,00**	**12.400,00**	**—**

Il piano chiude correttamente: $D_5 = 0$, capitale totale $= S$, interessi totali $= 2.400$ €.

AMMORTAMENTO PROGRESSIVO (FRANCESE)

Rata costante

È il metodo più diffuso: la **rata è costante**, $R_k = R$. Imponendo che il valore attuale delle n rate eguagli il prestito (rendita posticipata) si ottiene $S = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, da cui:

FRANCESE

$$R = \frac{S\,i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{S}{a_{\,n\rceil i}}, \qquad D_k = R\,\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}, \qquad I_k = i\,D_{k-1}, \qquad C_k = R - I_k$$

Poiché il debito residuo cala più lentamente, le quote interessi diminuiscono e **le quote capitale crescono in progressione geometrica** di ragione $(1+i)$: $C_k = C_1\,(1+i)^{k-1}$ con $C_1 = R - S\,i$.

ESERCIZIO 6.2

Stesso prestito dell'esercizio 6.1 ($S = 10{,}000$ €, $n = 5$, $i = 8\%$), ma con il metodo francese. Calcola la rata e costruisci il piano.

SVOLGIMENTO

$$a_{\,5|0.08} = \frac{1 - (1.08)^{-5}}{0.08} = 3.992710 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{10{,}000}{3.992710} = 2504{,}56 \text{ €}$$

PIANO DI AMMORTAMENTO — METODO FRANCESE

k	D_{k-1}	I_k	C_k	R_k	D_k
1	10.000,00	800,00	1.704,56	2.504,56	8.295,44
2	8.295,44	663,63	1.840,93	2.504,56	6.454,51
3	6.454,51	516,36	1.988,20	2.504,56	4.466,30
4	4.466,30	357,30	2.147,26	2.504,56	2.319,04
5	2.319,04	185,52	2.319,04	2.504,56	0,00
Σ	–	**2.522,82**	**10.000,00**	**12.522,82**	–

Le quote capitale crescono di ragione $1{,}08$: $C_1 = 1704{,}56$ e $C_1\,(1.08)^4 = 2319{,}04 = C_5$. Anche qui $D_5 = 0$.

CONFRONTO TRA I DUE METODI

A parità di S, n e i, l'**italiano** ha rate decrescenti e interessi totali minori (2.400 € contro 2.522,82 €), perché abbatte il capitale più in fretta; in compenso le prime rate sono più pesanti. Il **francese** ha rate costanti, più comode da pianificare, ma costa qualcosa in più in interessi complessivi.