Fattorizzazione / scomposizione

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

1. Raccoglimento fattor comune

$$Ax - Bx = x(A - B)$$

NB: È da considerarsi il primo caso da verifica, prima ancora di tutti le altre scomposizioni notevoli.

ESEMPI:

- $15x^2y + 5xy + 10y^2 = 5y(3x^2 + x + 2y)$
- $t^4 + 4t^3 + 3t^2 = t^2(t^2 + 4t + 3)$
- $50x^3 - 15x^2t = 5x^2(10x - 3t)$
- $6x - 2y + 4t^2 = 2(3x - y + 2t^2)$
- $n^4 + 5n^3 + \frac{1}{2}n = n\left(n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}\right)$
- $ab - a^3b^3x^2 = ab(1 - a^2b^2x^3)$
- $\frac{3}{4}a^2 + \frac{27}{4}a^2c = \frac{3}{4}a^2(1 + 9c)$
- $(x-1)^2 + (x-1) = (x-1)(x-1+1) = x(x-1)$
- $(a+3b)^3 + 2(a+3b)^2 = (a+3b)^2(a+3b+2)$
- $x^2 + y^2$ *nessun raccoglimento*

2. Raccoglimento a fattor parziale

$$Ax + Bx + Ay + By = x(A + B) + y(A + B) = (A + B)(x + y)$$

NB: Al raccoglimento a fattor parziale segue sempre il raccoglimento a fattor comune

NB: Esistono più raccoglimenti a fattor parziale possibili in un'espressione, non tutte però sono corrette

ESEMPI:

- $2ab - 6a - 7b + 21 = 2a(b-3) - 7(b-3) = (b-3)(2a-7)$
- $ax + 5x + ba + 5b = x(a+5) + b(a+5) = (a+5)(x+b)$
- $3ab + 15a - b - 5 = 3a(b+5) - (b+5) = (b+5)(3a-1)$
- $n^4 - n^3 - n + 1 = n^3(n-1) - (n-1) = (n-1)(n^3-1)$
- $ax - 2bx - 2ay + 4by + 3az - 6bz = x(a-2b) - 2y(a-2b) + 3z(a-2b) = (a-2b)(x-2y+3z)$
- $xy - y^2 - xz + yz = y(x-y) - z(x-y) = (x-y)(y-z)$
- $b^{x+y} - 3b^x - 2b^y + 6 = b^x(b^y-3) - 2(b^y-3) = (b^y-3)(b^x-2)$
- $12ac^2 - 6ac - 4c + 2 = 6ac(2c-1) - 2(2c-1) = (6ac-2)(2c-1)$
- $5^{3y} - 5^{2y} + 5^y - 1 = 5^{2y}(5^y-1) + (5^y-1) = (5^y-1)(5^{2y}+1)$

3. Differenza di quadrati

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

NB: nella differenza di quadrati i due termini possono essere elevati a gradi maggiori del secondo, ma sempre PARI.

NB: Può esser necessario prima fare un raccoglimento parziale o totale

- $x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$
- $4x^2 - 9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$
- $16a^2 - 4 = 4(4a^2-1) = 4(2a-1)(2a+1)$
- $x^2y^6 - 1 = (xy^3-1)(xy^3+1)$
- $81 - h^4 = (9-h^2)(9+h^2) = (3-h)(3+h)(9+h^2)$
- $(2x-3)^2 - y^4 = [(2x-3) - y^2][(2x-3) + y^2] = (2x-3-y^2)(2x-3+y^2)$
- $x^6y^{12} - z^{10} = (x^3y^6 - z^5)(x^3y^6 + z^5)$

- $\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{9}y^2 = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y\right)$
- $x^{2n} - t^4 = (x^n - t^2)(x^n + t^2)$
- $9s^2 - (n-1)^2 = (3s - n + 1)(3s + n - 1)$
- $0{,}25r^4 - 169 = (0{,}5r^2 - 13)(0{,}5r^2 + 13)$
- $16a^4d^8 - b^8 = (4a^2d^4 - b^4)(4a^2d^4 + b^4) = (2ad^2 - b^2)(2ad^2 + b^2)(4a^2d^4 + b^4)$

4. Quadrato di binomio

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

NB: Da notare la presenza dei due quadrati, il doppio prodotto deve essere utilizzato per verificare se si tratti effettivamente di un quadrato di binomio.

NB: Quando il doppio prodotto è negativa, si attribuisce il segno meno al secondo termine o al primo termine. Il risultato è equivalente, quindi per ogni scomposizione abbiamo due soluzioni.

- $x^4 - 4x^2y + 4y^2 = (x^2 - 2y)^2$
- $9t^4 - 12t^2 + 4 = (3t^2 - 2)^2$
- $a^4b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - 6ab + 9b^2) = a^2b^2(a^2 - 3b)^2$
- $4a^{10} - 2a^5 + \frac{1}{4} = \left(2a^5 - \frac{1}{2}\right)^2$
- $a^2 - 6a - 9 =$ *inscomponibile*
- $a^{4n} + 2a^{2n+3} + a^6 = (a^{2n} + a^3)^2$
- $\frac{9}{4}x^6y^6 - 3x^3y^3(x+y) + (x+y)^2 = \left(\frac{3}{2}x^3y^3 - x - y\right)^2$
- $0{,}\bar{4}x^2 - 1{,}\bar{3}xy + y^2 = \left(\frac{2}{3}x - y\right)^2$
- $\frac{25}{4}x^6 - 5x^3 + 1 = \left(\frac{5}{2}x^3 - 1\right)^2$

CASI PARTICOLARI: QUADRATO DI UN BINOMIO & DIFFERENZA DI QUADRATI

- $a^2 - 4a + 4 - 9b^2 = (a-2)^2 - 9b^2 = (a - 2 - 3b)(a - 2 + 3b)$

- $a^6 - a^4 - 2a^3 + 1 = (a^3 - 1)^2 - a^4 = (a^3 - 1 - a^2)(a^3 - 1 + a^2)$
- $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - w^2 - 2xy + 2zw &= (x - y)^2 - (z^2 + w^2 - 2zw) \\ &= (x - y)^2 - (z - w)^2 \\ &= (x - y - z + w)(x - y + z - w) \end{aligned}$$
- $a^{2x} + 6a^x + 9 - b^{2x} = (a^x + 3)^2 - b^{2x} = (a^x + 3 - b^x)(a^x + 3 + b^x)$
- $$\begin{aligned} -x^2 + 4xy - 4y^2 + a^2b^2 - 6ab + 9 &= -(x^2 - 4xy + 4y^2) + (a^2b^2 - 6ab + 9) \\ &= (ab - 3)^2 - (x - 2y)^2 \\ &= (ab - 3 - x + 2y)(ab - 3 + x - 2y) \end{aligned}$$

5. Quadrato di un trinomio

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

NB: Vi sono tre doppi prodotti, i cui segni determinano anche la positività o negatività dei termini A, B e C.

NB: Anche nel quadrato di trinomio ci sono due soluzioni, con segni opposti.

- $a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc = (a + b - c)^2$ *oppure* $(-a - b + c)^2$
- $s^4 + 9x^2 + t^2 - 6s^2x + 6xt - 2s^2t = (-s^2 + 3x + t)^2$ *oppure* $(s^2 - 3x - t)^2$
- $\frac{9}{16}x^2 + 3xy - \frac{3}{2}x^2y + 4y^2 - 4xy^2 + x^2y^2 = \left(\frac{3}{4}x - xy + 2y\right)^2$ *oppure* $\left(-\frac{3}{4}x + xy - 2y\right)^2$
- $a^2 + c^2x^4 + 49t^2 - 2acx^2 + 14at - 14cx^2t = (a - cx^2 + 7t)^2$ *oppure ….*
- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz = (x - 2y + 3z)^2$ *oppure ….*
- $x^{2n} + 9y^{8n} + c^2 + 2x^nc + 6y^{4n}c + 6x^ny^{4n} = (x^n + 3y^{4n} + c)^2$

6. Cubo di un binomio

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

NB: E' caratterizzato dalla presenza di due cubi e due tripli-prodotti che posso essere di segno discorde o concorde. Individuati i due cubi, dopo averne fatto le rispettive radici, verifico la correttezza dei segni creando i tripli-prodotti.

- $a^3 + 6a^2x + 12ax^2 + 8x^3 = (a + 2x)^3$
- $27y^3 - 8a^3 - 54ay^2 + 36a^2y = (3y - 2a)^3$
- $t^6 - 3t^4 - 1 + 3t^2 = (t^2 - 1)^3 = (t - 1)^3(t + 1)^3$
- $64x^3y^3 - 8 - 96x^2y^2 + 48xy = 8(8x^3y^3 - 1 - 12x^2y^2 + 6xy) = 8(2xy - 1)^3$
- $125x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{75}{2}x^2y + \frac{15}{4}xy^2 = \left(5x + \frac{1}{2}y\right)^3$
- $8a^3 - \frac{1}{27}b^3 - 4a^2b + \frac{2}{3}ab^2 = \left(2a - \frac{1}{3}b\right)^3$

7. Somma/differenza di cubi

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$
$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

- $a^6 - 1 = (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^4 + a^2 + 1)$
- $a^9 + 8 = (a^3 + 2)(a^6 - 2a^3 + 4)$
- $a^3 - x^3y^3 = (a - xy)(a^2 + axy + x^2y^2)$
- $d^{12} - (x + 2y)^3 = (d^4 - x - 2y)(d^8 + d^4(x + 2y) + (x + 2y)^2)$
- $125 - y^3 = (5 - y)(25 + 5y + y^2)$
- $\frac{m^3}{8} + t^9 = \left(\frac{m}{2} + t^3\right)\left(\frac{m^2}{4} - \frac{mt^3}{2} + t^6\right)$
- $27x^4 - \frac{xy^3}{8} = x\left(27x^3 - \frac{y^3}{8}\right) = x\left(3x - \frac{y}{2}\right)\left(9x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{y^2}{4}\right)$

8. Trinomio notevole

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b) \qquad \begin{cases} s = a + b \\ p = a \cdot b \end{cases}$$

- $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$
- $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$
- $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

- $x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$
- $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$
- $x^2 - 2x - 143 = (x - 13)(x + 11)$
- $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$
- $x^2 + 11x + 10 = (x + 10)(x + 1)$
- $x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$
- $x^2 - 2x - 13 =$ *irriducibile*
- $x^2 + 9x - 52 = (x + 13)(x - 4)$
- $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$
- $x^2 - 12x + 22 = (x - 11)(x - 1)$
- $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

9. Trinomio notevole "speciale"

$$ax^2 + bx + c \qquad \begin{cases} s = b \\ p = a \cdot c \end{cases}$$

NB: In questa particolare forma di scomposizione, bisogna cercare di ottenere un raccoglimento parziale andando a modificare il polinomio. Bisogna cercare di creare un altro elemento attraverso somma o sottrazione dell'elemento centrale bx.

NB: I due numeri che devo trovare moltiplicati risultano ***ac*** e sommati ***b***.

- $3x^2 + 14x + 8 = 3x^2 + 12x + 2x + 8 = 3x(x + 4) + 2(x + 4) = (3x + 2)(x + 4)$
- $6x^2 - 7x - 5 = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 2x(3x - 5) + (3x - 5) = (3x - 5)(2x + 1)$
- $\begin{aligned} 6m^2 - 15m + 6 &= 6m^2 - 12m - 3m + 6 \\ &= 6m(m - 2) - 3(m - 2) \\ &= (6m - 3)(m - 2) = 3(2m - 1)(m - 2) \end{aligned}$
- $\begin{aligned} 43y^2 - 11y - 32 &= 43y^2 - 43y + 32y - 32 \\ &= 43y(y - 1) + 32(y - 1) = (43y + 32)(y - 1) \end{aligned}$
- $9x^2 - 12x + 4 =$ *quadrato di un binomio*

10. Trinomio notevole varianti

(trinomio biquadratico, omogeneo, con parametri)

- $x^4 - 7x^2 + 12 = (x^2 - 3)(x^2 - 4) = (x^2 - 3)(x - 2)(x + 2)$
- $x^4 - 2x^2 - 143 = (x^2 - 13)(x^2 + 11)$
- $x^4 + 8x^2 + 15 = (x^2 + 3)(x^2 + 5)$
- $x^4 + 11x^2 + 10 = (x^2 + 10)(x^2 + 1)$
- $x^4 + 7x^2 + 6 = (x^2 + 6)(x^2 + 1)$
- $$\begin{aligned} 12a^4 - 8a^2b + b^2 &= 12a^4 - 6a^2b - 2a^2b + b^2 \\ &= 6a^2(2a^2 - b) - b(2a^2 - b) = (2a^2 - b)(6a^2 - b) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 5m^2n^2 - 6mn + 1 &= 5m^2n^2 - 5mn - mn + 1 \\ &= 5mn(mn - 1) - (mn - 1) = (mn - 1)(5mn - 1) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 4a^4 - 5a^2b^2 + b^4 &= 4a^4 - 4a^2b^2 - a^2b^2 + b^4 \\ &= 4a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(4a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)(2a - b)(2a + b) \end{aligned}$$

11. Ruffini

a) Utilizzo il Teorema del resto per identificare il valore tale che annulli il polinomio $p(k) = 0$

b) A quel punto il polinomio può essere diviso per il binomio $(x - k)$

c) Posso effettuare a quel punto una normale operazione di divisione tra polinomi, in questo caso invece utilizzo la tecnica di Ruffini, il risultato sarà il medesimo:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x)(x - k)$$

ESEMPIO:

$$p(a) = 6a^4 + 7a^3 + 6a^2 + 3a - 2$$

Per prima cosa cerco il valore di k per cui si annulla il polinomio

$$p(1) = 6 + 7 + 6 + 3 - 2 \neq 0$$

$p(-1) = 6 - 7 + 6 - 3 - 2 = 0$ **OK**

Vado a costituire il grafico per effettuare la divisione

	6	7	6	3	−2
−1		−6	−1	−5	2
	6	1	5	−2	0

$$p(a) = (a+1)(6a^3 + a^2 + 5a - 2)$$

A questo punto devo rifare Ruffini sul secondo polinomio ottenuto

- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$
- $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = (2x-1)(3x-1)(4x-1)$
- $t^4 + 10t^3 + 35t^2 + 50t + 24 = (t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$
- $2x^3 - 4x^2 - 14x - 8 = 2(x+1)^2(x-4)$
- $c^5 + c^4 + 4c^2 = c^2(c+2)(c^2 - c + 2)$