FORMULARIO · ALGEBRA · LICEO

Mappa delle scomposizioni di un polinomio

Tutti i casi di fattorizzazione in ordine logico di applicazione, con esempi guidati. Davanti a un polinomio, si segue sempre l'algoritmo: prima il raccoglimento totale, poi si contano i termini, infine si applicano i casi notevoli.

ALGORITMO Come procedere davanti a un polinomio

01 **Prova SEMPRE prima il raccoglimento totale**

È il primo controllo da fare, prima di qualsiasi altra scomposizione notevole. Se trovi un fattore comune a tutti i termini, lo metti in evidenza e proseguì sul polinomio residuo.

02 **Conta i termini del polinomio**

Il numero di termini ti suggerisce quali casi notevoli tentare. Vedi la tabella qui sotto.

03 **Applica il caso notevole adatto**

Differenza di quadrati, quadrato di binomio, cubo, trinomio notevole… Se nessuno funziona, ricorri a Ruffini.

04 **Itera su ogni fattore ottenuto**

Ogni fattore può essere ulteriormente scomposto. Ti fermi solo quando tutti i fattori sono irriducibili.

N° TERMINI	CASI DA TENTARE (IN ORDINE)
2 termini	Differenza di quadrati · somma/differenza di cubi
3 termini	Quadrato di binomio · trinomio notevole x^2+sx+p · trinomio speciale ax^2+bx+c · trinomio specialissimo (biquadratico)
4 termini	Cubo di binomio · raccoglimento parziale
6 termini	Quadrato di trinomio
N termini	Casi particolari (combinazioni) · Ruffini come ultima spiaggia

CASO 1 Raccoglimento a fattor comune (totale)

Il primo controllo da fare su qualsiasi polinomio, prima di ogni altra scomposizione.

SCHEMA GENERALE

$$Ax - Bx = x\,(A - B)$$

ESEMPI

- $15x^2y + 5xy + 10y^2 = 5y\,(3x^2 + x + 2y)$
- $t^4 + 4t^3 + 3t^2 = t^2\,(t^2 + 4t + 3)$
- $50x^3 - 15x^2t = 5x^2\,(10x - 3t)$
- $\frac{3}{4}a^2 + \frac{27}{4}a^2c = \frac{3}{4}a^2\,(1 + 9c)$
- $(x-1)^2 + (x-1) = (x-1)(x-1+1) = x\,(x-1)$
- $(a+3b)^3 + 2(a+3b)^2 = (a+3b)^2\,(a+3b+2)$
- $x^2 + y^2 \rightarrow$ *nessun raccoglimento*

NB. Il fattor comune può essere un'espressione, non solo una lettera. Ad esempio in $(x-1)^2 + (x-1)$ il fattor comune è il binomio $(x-1)$.

CASO 2 Raccoglimento parziale

Si applica quando i termini si possono raggruppare a coppie con un fattore comune diverso per gruppo.

SCHEMA GENERALE

$$Ax + Bx + Ay + By = x(A+B) + y(A+B) = (A+B)(x+y)$$

ESEMPI

- $2ab - 6a - 7b + 21 = 2a(b-3) - 7(b-3) = (b-3)(2a-7)$
- $3ab + 15a - b - 5 = 3a(b+5) - (b+5) = (b+5)(3a-1)$
- $n^4 - n^3 - n + 1 = n^3(n-1) - (n-1) = (n-1)(n^3-1)$
- $xy - y^2 - xz + yz = y(x-y) - z(x-y) = (x-y)(y-z)$
- $12ac^2 - 6ac - 4c + 2 = 6ac(2c-1) - 2(2c-1) = (6ac-2)(2c-1)$

NB. Dopo il raccoglimento parziale segue sempre un raccoglimento a fattor comune. Se non riesci a chiudere il secondo passaggio, prova un raggruppamento diverso: in un polinomio possono esistere più raggruppamenti possibili, ma non tutti portano alla scomposizione.

CASO 3 Differenza di quadrati

Due termini, entrambi quadrati perfetti, con segno opposto.

SCHEMA GENERALE

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

ESEMPI

- $x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$
- $4a^2 - 9b^2 = (2a-3b)(2a+3b)$
- $16a^2 - 4 = 4(4a^2-1) = 4(2a-1)(2a+1)$ *(prima raccoglimento totale!)*
- $81 - h^4 = (9-h^2)(9+h^2) = (3-h)(3+h)(9+h^2)$
- $(2x-3)^2 - y^4 = (2x-3-y^2)(2x-3+y^2)$
- $\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{9}y^2 = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y\right)$
- $9s^2 - (n-1)^2 = (3s-n+1)(3s+n-1)$

NB. Gli esponenti possono essere qualunque numero **pari**: x^4, x^6, x^{10} sono tutti quadrati. La somma di quadrati $A^2 + B^2$ è invece **irriducibile** nei reali.

CASO 4 Somma e differenza di cubi

Due termini, entrambi cubi perfetti.

SCHEMI GENERALI

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

ESEMPI

- $a^9 + 8 = (a^3+2)(a^6 - 2a^3 + 4)$
- $125 - y^3 = (5-y)(25 + 5y + y^2)$
- $a^6 - 1 = (a^2-1)(a^4+a^2+1) = (a-1)(a+1)(a^4+a^2+1)$
- $\frac{m^3}{8} + t^9 = \left(\frac{m}{2} + t^3\right)\left(\frac{m^2}{4} - \frac{mt^3}{2} + t^6\right)$
- $27x^4 - \frac{xy^3}{8} = x\left(27x^3 - \frac{y^3}{8}\right) = x\,(3x - \frac{y}{2})(9x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{y^2}{4})$

NB. Il trinomio quoziente $A^2 \mp AB + B^2$ è sempre irriducibile nei reali. Memorizza la regola dei segni: stesso segno della somma fra parentesi, poi *meno* per il doppio prodotto se la somma originale è positiva (e viceversa).

CASO 5 Quadrato di binomio

Tre termini: due quadrati e il doppio prodotto.

SCHEMA GENERALE

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

Verifica. Riconosci due quadrati perfetti, prendi le loro basi A e B, e **controlla** che il termine restante sia esattamente $\pm 2AB$. Se il segno del doppio prodotto è negativo, scegli di mettere il *meno* davanti ad A oppure a B: il risultato è equivalente.

ESEMPI

- $x^4 - 4x^2y + 4y^2 = (x^2 - 2y)^2$
- $9t^4 - 12t^2 + 4 = (3t^2 - 2)^2$
- $4a^{10} - 2a^5 + \frac{1}{4} = \left(2a^5 - \frac{1}{2}\right)^2$
- $\frac{25}{4}x^6 - 5x^3 + 1 = \left(\frac{5}{2}x^3 - 1\right)^2$
- $a^4b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - 6ab + 9b^2) = a^2b^2(a - 3b)^2$
- $a^2 - 6a - 9 \rightarrow$ *inscomponibile* (il termine -9 non è $-B^2$, e il doppio prodotto non torna)

ERRORE COMUNE

Quadrato di binomio dopo raccoglimento

SBAGLIATO $a^4b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b^4 = a^2b^2\,(a^2 - 3b)^2$

CORRETTO $a^4b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b^4 = a^2b^2\,(a - 3b)^2$

Dopo aver raccolto a^2b^2, dentro la parentesi resta $a^2 - 6ab + 9b^2$: le basi del quadrato sono a e $3b$, non a^2 e $3b$. Verifica sempre il doppio prodotto: $2 \cdot a \cdot 3b = 6ab$. ✓

CASO 6 Quadrato di trinomio

Sei termini: tre quadrati e tre doppi prodotti.

SCHEMA GENERALE

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

ESEMPI

- $a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc = (a + b - 2c)^2$
- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz = (x - 2y + 3z)^2$
- $s^4 + 9x^2 + t^2 - 6s^2x + 6xt - 2s^2t = (-s^2 + 3x + t)^2$

NB. Anche per il quadrato di trinomio esistono *due* soluzioni con segni opposti: $(A + B + C)^2 = (-A - B - C)^2$. I segni di A, B, C si deducono dai segni dei tre doppi prodotti.

CASO 7 Cubo di binomio

Quattro termini: due cubi e due tripli prodotti.

SCHEMI GENERALI

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = (A+B)^3$$
$$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 = (A-B)^3$$

Verifica. Riconosci i due cubi perfetti, estrai le loro radici cubiche A e B, poi controlla i tripli prodotti $3A^2B$ e $3AB^2$. I segni dei tripli prodotti devono essere coerenti con il segno di B (tutti positivi se B positivo, alternati se B negativo).

ESEMPI

- $a^3+6a^2x+12ax^2+8x^3 = (a+2x)^3$
- $27y^3-8a^3-54ay^2+36a^2y = (3y-2a)^3$
- $t^6-3t^4+3t^2-1 = (t^2-1)^3 = (t-1)^3(t+1)^3$
- $64x^3y^3-8-96x^2y^2+48xy = 8\,(8x^3y^3-1-12x^2y^2+6xy) = 8\,(2xy-1)^3$
- $125x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{75}{2}x^2y+\frac{15}{4}xy^2 = \left(5x+\frac{1}{2}y\right)^3$
- $8a^3-\frac{1}{27}b^3-4a^2b+\frac{2}{3}ab^2 = \left(2a-\frac{1}{3}b\right)^3$

CASO 3+4 Casi particolari: differenza/quadrato combinati

Quando una scomposizione preliminare crea una struttura riconoscibile (di solito una differenza di quadrati).

ESEMPI · RAGGRUPPA E POI DIFFERENZA DI QUADRATI

- $a^2-4a+4-9b^2 = (a-2)^2-(3b)^2 = (a-2-3b)(a-2+3b)$
- $a^6-a^4-2a^3+1 = (a^3-1)^2-a^4 = (a^3-1-a^2)(a^3-1+a^2)$
- $x^2+y^2-z^2-w^2-2xy+2zw = (x-y)^2-(z-w)^2 = (x-y-z+w)(x-y+z-w)$
- $a^{2x}+6a^x+9-b^{2x} = (a^x+3)^2-(b^x)^2 = (a^x+3-b^x)(a^x+3+b^x)$

Strategia. Quando vedi più di tre termini e riconosci un quadrato di binomio o di trinomio «nascosto», raggruppa per ricostruirlo. Spesso il polinomio si riduce a una differenza di quadrati del tipo $(\dots)^2-(\dots)^2$.

CASO 8 Trinomio notevole · *somma e prodotto*

Trinomio con coefficiente direttore uguale a 1.

SCHEMA GENERALE

$$x^2 + s\,x + p \;=\; (x + a)(x + b)$$

con $a + b = s$ e $a \cdot b = p$

ESEMPI

- $x^2 - 2x - 15 \;=\; (x - 5)(x + 3)$ $(-5 + 3 = -2,\ -5 \cdot 3 = -15)$
- $x^2 - 7x + 12 \;=\; (x - 3)(x - 4)$
- $x^2 + 11x + 24 \;=\; (x + 3)(x + 8)$
- $x^2 - 2x - 143 \;=\; (x - 13)(x + 11)$
- $x^2 + 9x - 52 \;=\; (x + 13)(x - 4)$
- $x^2 - 2x - 13 \;\to$ *irriducibile*

CASO 9 Trinomio «speciale» · coefficiente $\neq 1$

Si chiude con raccoglimento parziale: spezza il termine centrale e raggruppa.

SCHEMA GENERALE

$$a x^2 + b\,x + c$$

Cerca $a + b' = b$ e $a \cdot b' = ac$; spezza bx in due termini.

ESEMPI

- $3x^2 + 14x + 8 = 3x^2 + 12x + 2x + 8 = 3x(x + 4) + 2(x + 4) = (3x + 2)(x + 4)$
- $6x^2 - 7x - 5 = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 2x(3x - 5) + (3x - 5) = (3x - 5)(2x + 1)$
- $6m^2 - 15m + 6 = 3(2m^2 - 5m + 2) = 3(2m - 1)(m - 2)$
- $43y^2 - 11y - 32 = (43y + 32)(y - 1)$

CASO 10 Trinomio «specialissimo» · biquadratico e omogeneo

Casi 8 e 9 applicati a polinomi di grado superiore.

FORME TIPICHE

$$x^4 + s\,x^2 + p \qquad a\,x^4 + b\,x^2y^2 + c\,y^4$$

Sostituisci mentalmente $X = x^2$: torna al trinomio notevole.

ESEMPI

- $x^4 - 7x^2 + 12 \;=\; (x^2 - 3)(x^2 - 4) \;=\; (x^2 - 3)(x - 2)(x + 2)$
- $x^4 + 11x^2 + 10 \;=\; (x^2 + 10)(x^2 + 1)$
- $12a^4 - 8a^2b + b^2 \;=\; (2a^2 - b)(6a^2 - b)$
- $4a^4 - 5a^2b^2 + b^4 \;=\; (a - b)(a + b)(2a - b)(2a + b)$

CASO 11 Ruffini · l'ultima spiaggia

Quando nessun caso notevole funziona, si cerca una radice e si divide il polinomio.

PROCEDURA IN 3 PASSI

1. Cerca un valore k che annulla il polinomio: $p(k) = 0$.
2. Allora il polinomio è divisibile per $(x - k)$.
3. Esegui la divisione con lo schema di Ruffini, e ottieni il quoziente $Q(x)$:

$$P(x) \;=\; (x-k)\,Q(x)$$

Dove cercare k. Le radici intere di un polinomio a coefficienti interi si trovano fra i **divisori del termine noto**. Per esempio, in $p(a) = 6a^4 + 7a^3 + 6a^2 + 3a - 2$ il termine noto è -2: provi $\pm 1, \pm 2$. Le radici razionali $\frac{p}{q}$: p divisore del termine noto, q del coefficiente direttore.

ESEMPIO Scomposizione di $p(a) = 6a^4 + 7a^3 + 6a^2 + 3a - 2$

Step 1. Cerco una radice fra i divisori di -2: $p(1) = 6 + 7 + 6 + 3 - 2 = 20 \neq 0$ ✗ · $p(-1) = 6 - 7 + 6 - 3 - 2 = 0$ ✓

Step 2. Applico lo schema di Ruffini con $k = -1$:

	6	7	6	3	-2
-1		-6	-1	-5	2
	6	1	5	-2	0

Step 3. I coefficienti del quoziente sono in verde, il resto in rosso (deve essere 0):

$$p(a) \;=\; (a+1)(6a^3 + a^2 + 5a - 2)$$

Se serve, ripeto Ruffini sul fattore di terzo grado.

ALTRI ESEMPI

- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;=\; (x-1)(x-2)(x-3)$
- $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 \;=\; (2x-1)(3x-1)(4x-1)$
- $t^4 + 10t^3 + 35t^2 + 50t + 24 \;=\; (t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$
- $2x^3 - 4x^2 - 14x - 8 \;=\; 2(x+1)^2(x-4)$
- $c^5 + c^4 + 4c^2 \;=\; c^2(c+2)(c^2 - c + 2)$

Ordine consigliato. Ruffini è potente ma laborioso: prova sempre *prima* tutti i casi notevoli e i raccoglimenti. Passa a Ruffini solo quando il polinomio ha grado ≥ 3 e nessuno schema notevole è applicabile.