Monomi, polinomi, scomposizioni e frazioni algebriche

Liceo scientifico · secondo anno · verifica sommativa

Svolgimento ragionato passo per passo · documento riservato al docente

ESERCIZIO 1 · SOLUZIONE — 2,0 p.

Monomi ed espressioni polinomiali

a)

Elevo a cubo il primo monomio: $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^3 = \frac{8}{27}a^6b^3$.

Eseguo la divisione: $\frac{8}{27}a^6b^3 : \left(-\frac{4}{9}a^3b^2\right) = \frac{8}{27}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)a^3b = -\frac{2}{3}a^3b$.

Moltiplico per l'ultimo fattore: $-\frac{2}{3}a^3b\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right) = \frac{1}{3}a^4b^2$.

RISULTATO

$$\frac{1}{3}a^4b^2$$

b)

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$x(x-3)(x+3) = x\left(x^2-9\right) = x^3 - 9x$

$2\left(3x^2-2\right) = 6x^2 - 4$

Sommo tenendo conto del segno meno davanti al secondo termine:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 9x + 6x^2 - 4 = 21x - 12$$

RISULTATO

$$21x - 12 = 3(7x - 4)$$

ERRORE COMUNE

Nel secondo termine il segno meno va distribuito su *tutto* lo sviluppo: molti scrivono $-x^3 - 9x$ invece di $-x^3 + 9x$.

ESERCIZIO 2 · SOLUZIONE

2,0 p.

Scomposizione in fattori

a)

Raccoglimento parziale a due a due: $x^2(x-2)-9(x-2)$.

Raccolgo il binomio comune: $(x-2)\,(x^2-9)$.

x^2-9 è una differenza di quadrati.

RISULTATO

$(x-2)(x-3)(x+3)$

b)

Riordino isolando il trinomio: $(4a^2+4a+1)-b^2$.

Il trinomio è un quadrato di binomio: $(2a+1)^2-b^2$.

Differenza di quadrati con $A=2a+1$ e $B=b$.

RISULTATO

$(2a+1-b)(2a+1+b)$

ERRORE COMUNE

In b) l'errore tipico è raccogliere 4 tra $4a^2$ e $4a$: si perde la struttura di quadrato. Prima si cerca il trinomio quadrato, poi la differenza di quadrati.

ESERCIZIO 3 · SOLUZIONE

1,5 p.

Divisione tra polinomi

Entrambi i polinomi sono già ordinati secondo le potenze decrescenti di x e non mancano termini, quindi si può dividere direttamente.

```
 6x⁴ - 5x³ + 2x² - 8x + 3 | 2x² - x + 1
-6x⁴ + 3x³ - 3x²          | ------------
--------------------------| 3x² - x - 1
     -2x³ -  x² - 8x + 3
     +2x³ -  x² +  x
     ---------------
          -2x² - 7x + 3
          +2x² -  x + 1
          -------------
               -8x + 4
```

Il grado del resto (1) è minore del grado del divisore (2): la divisione è conclusa.

RISULTATO

$Q(x)=3x^2-x-1,\ R(x)=-8x+4$

Verifica. $(2x^2-x+1)\,(3x^2-x-1)=6x^4-5x^3+2x^2+0x-1$, e sommando $-8x+4$ si ottiene $6x^4-5x^3+2x^2-8x+3=A(x)$.

ERRORE COMUNE

Ricorda che ogni riga va *sottratta*: conviene scrivere direttamente i termini con il segno cambiato, come nello schema qui sopra.

ESERCIZIO 4 · SOLUZIONE

2,5 p.

Regola di Ruffini e teorema del resto

a)

Per il teorema del resto, il resto della divisione per $(x-a)$ è $P(a)$. Qui $a=3$:

$$P(3) = 2\cdot 27 - 5\cdot 9 + 3 + 6 = 54 - 45 + 9 = 18$$

RISULTATO

$R = 18$ (il quoziente, non richiesto, è $2x^2 + x + 4$)

b)

Cerco una radice tra i divisori del termine noto 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Provo $x=-1$: $-1-4-1+6=0$, quindi $(x+1)$ è un divisore.

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

Il quoziente è $x^2 - 5x + 6$, che si scompone con somma e prodotto: -2 e -3.

RISULTATO

$(x+1)(x-2)(x-3)$

c)

$(x-2)$ divide il polinomio se e solo se $P(2)=0$:

$$P(2) = 8 + 4k - 4 + 4 = 4k + 8 = 0 \implies k = -2$$

RISULTATO

$k=-2$ (infatti $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x-2)(x^2-2)$)

ERRORE COMUNE

In b) la riga di Ruffini si costruisce con la radice -1, non con $+1$: il divisore è $(x+1) = \big(x-(-1)\big)$.

ESERCIZIO 5 · SOLUZIONE

1,0 p.

Frazioni algebriche — livello base

Scompongo il denominatore comune: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

C.E.: $x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1$.

$$\frac{(x+1) + 2(x-1) - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{x + 1 + 2x - 2 - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x - 5}{(x-1)(x+1)}$$

Il numeratore non ha fattori comuni con il denominatore: la frazione è già ridotta ai minimi termini.

RISULTATO

$\dfrac{3x-5}{x^2-1}$, con $x \neq \pm 1$

ERRORE COMUNE

Il segno meno davanti alla terza frazione va applicato a tutto il numeratore: -4, non $+4$.

ESERCIZIO 6 · SOLUZIONE

1,0 p.

Frazioni algebriche — livello avanzato

Scompongo tutti i denominatori: $x^2-9=(x-3)(x+3)$, $x^2+6x+9=(x+3)^2$, $x^3-27=(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$.

C.E.: $x\neq 3 \ \wedge \ x\neq -3$. Il trinomio x^2+3x+9 ha discriminante $\Delta=9-36=-27<0$, quindi non si annulla mai. Inoltre il divisore deve essere diverso da zero: $(x+3)^2\neq 0$, condizione già inclusa.

Prima parentesi (denominatore comune $(x-3)(x+3)$):

$$\frac{2x+(x+3)-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x+6}{(x-3)(x+3)}=\frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2}{x-3}$$

Divisione: moltiplico per il reciproco del secondo termine.

$$\frac{2}{x-3}\cdot\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x+3)^2}=\frac{2\left(x^2+3x+9\right)}{(x+3)^2}$$

RISULTATO

$\dfrac{2\left(x^2+3x+9\right)}{(x+3)^2}$, con $x\neq\pm 3$

ERRORE COMUNE

Le C.E. si scrivono *prima* di semplificare, sui denominatori di partenza: dopo la semplificazione il fattore $(x-3)$ sparisce, ma la condizione $x\neq 3$ resta.

ESERCIZIO	CONTENUTO	PUNTI
1a	Potenza, divisione e prodotto di monomi	0,8
1b	Cubo di binomio, differenza di quadrati, riduzione	1,2
2a	Raccoglimento parziale + differenza di quadrati	1,0
2b	Trinomio quadrato nascosto + differenza di quadrati	1,0
3	Divisione con resto e verifica dell'identità	1,5
4a	Teorema del resto	0,5
4b	Ruffini e scomposizione completa	1,0
4c	Parametro e condizione di divisibilità	1,0
5	Somma di frazioni algebriche + C.E.	1,0
6	Somma, divisione, differenza di cubi + C.E.	1,0
	Totale	**10,0**

Sufficienza a 6,0 punti. Le C.E. mancanti negli esercizi 5 e 6 comportano la perdita di 0,3 punti ciascuna, anche se la semplificazione è corretta.