# Punti di non derivabilità

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Una funzione può essere continua in un punto e non essere derivabile. Qui trovi i tre casi classici, ciascuno con la condizione sui limiti della derivata, il significato geometrico e un esempio, più uno schema finale.

## 1 Prima di classificare

FORMULA 1 · DERIVABILITÀ IN UN PUNTO

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

Il limite deve esistere ed essere **finito**. Se $f$ è continua in $x_0$ e esistono i limiti di $f'(x)$ per $x \to x_0^{\pm}$, questi coincidono con le derivate destra e sinistra (criterio di derivabilità).

METODO · COME SI STUDIA UN PUNTO

1. Controlla la **continuità** in $x_0$: se $f$ non è continua (salto, discontinuità eliminabile o infinita) non è derivabile e hai finito.
2. Calcola $f'(x)$ per $x \neq x_0$.
3. Calcola i limiti $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$. Se $f'$ non è definita vicino a $x_0$, usa il rapporto incrementale.
4. Classifica il punto con la tabella dell'ultima pagina.

## 2 Punto angoloso

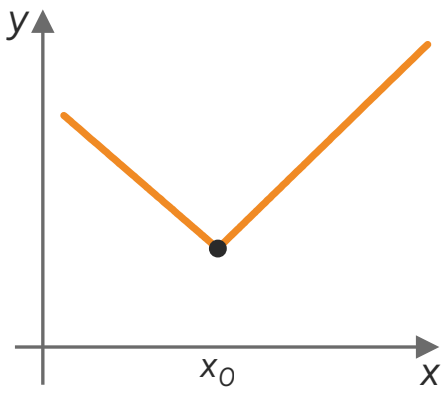
FORMULA 2 · PUNTO ANGOLOSO

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \qquad \text{entrambi finiti}$$

con $f$ continua in $x_0$. Compaiono nelle funzioni con modulo e nelle funzioni definite a tratti.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

In $x_0$ il grafico ha due **semitangenti** con coefficienti angolari diversi, $f'_-(x_0)$ a sinistra e $f'_+(x_0)$ a destra: il grafico ha uno **spigolo** e non esiste una tangente unica.




*punto angoloso*

**ESEMPIO 1** $f(x) = |x-3|$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 3 \\ +1 & x > 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 3^+} f'(x)$$

I limiti sono finiti e diversi: $x_0 = 3$ è un punto angoloso.

**ESEMPIO 2** Funzioni definite a tratti in $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3x-2 & x > 1 \end{cases}$$

Entrambe sono continue in $1$ (i due pezzi valgono $1$). Per $f$: $f'(1^-) = 2$ e $f'(1^+) = 2$, quindi $f$ **è derivabile** con $f'(1) = 2$. Per $g$: $g'(1^-) = 2$ e $g'(1^+) = 3$, quindi $x_0 = 1$ è un **punto angoloso**. Un'espressione a tratti non basta per avere uno spigolo.

## 3 Punto di flesso a tangente verticale

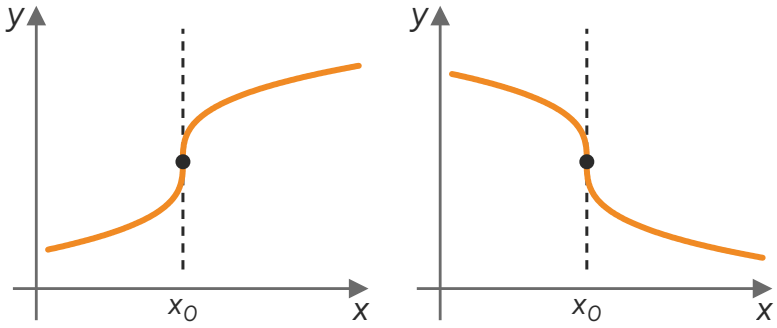
**FORMULA 3 · FLESSO A TANGENTE VERTICALE**

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

con $f$ continua in $x_0$: i due limiti sono **lo stesso** infinito.

**SIGNIFICATO GEOMETRICO**

La tangente in $x_0$ esiste ed è la retta **verticale** $x = x_0$. Il grafico la **attraversa**: la funzione è monotona, crescente se i limiti sono $+\infty$, decrescente se sono $-\infty$. Compare nelle radici di indice dispari.




*limiti $+\infty$* *limiti $-\infty$*

**ESEMPIO 3** $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = +\infty$$

Il rapporto incrementale in $x_0 = 3$ tende a $+\infty$: $f$ non è derivabile, la tangente è verticale (flesso ascendente).

## 4 Punto di cuspide

FORMULA 4 · CUSPIDE

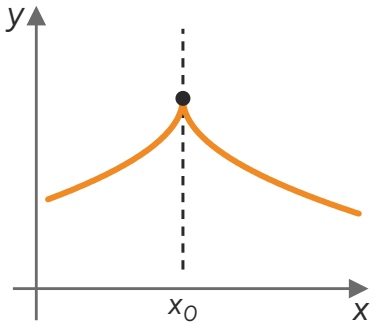
$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

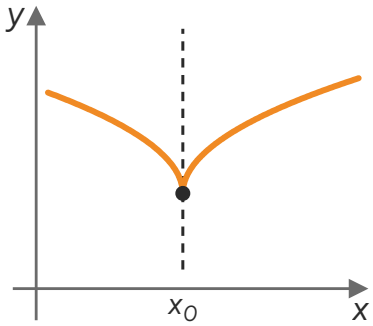
con $f$ continua in $x_0$: i due limiti sono infiniti di **segno opposto**.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Anche qui la tangente è verticale, ma il grafico **non** la attraversa: i due rami stanno dalla stessa parte e le due semitangenti coincidono. Con limiti ($+\infty$ a destra, $-\infty$ a sinistra) la cuspide è un **minimo**; con i segni opposti è un **massimo**.




*cuspide con massimo*




*cuspide con minimo*

ESEMPIO 4 $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{x}{2\,|x|\sqrt{|x|}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$$

Infiniti di segno opposto: cuspide con minimo. Lo stesso vale per $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, mentre $f(x) = -\sqrt{|x|}$ ha una cuspide con massimo.

## 5 Altri casi da conoscere

CASI CHE NON RIENTRANO NEI TRE TIPI

**Una derivata finita e una infinita.** Con $f(x) = x$ per $x < 0$ e $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$ si ha $f'_-(0) = 1$ e $f'_+(0) = +\infty$: $f$ non è derivabile in $0$ (alcuni testi lo chiamano punto angoloso in senso lato).
**Rapporto incrementale che oscilla.** Con $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ e $f(0) = 0$ la funzione è continua, ma $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$ non ha limite: non esistono nemmeno le semitangenti.
**Estremi dell'intervallo.** Agli estremi del dominio si può parlare solo di derivata destra o sinistra.

ERRORE COMUNE

**Derivata infinita non vuol dire derivabile**

SBAGLIATO $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty \Rightarrow f$ è derivabile con $f'(x_0) = +\infty$

CORRETTO $f'(x_0)$ deve essere un numero reale: con limiti infiniti $f$ **non** è derivabile

Nei flessi a tangente verticale e nelle cuspidi la tangente esiste ma è verticale, e il suo coefficiente angolare non è un numero.

## 6 Schema riassuntivo

| TIPO DI PUNTO | LIMITI DI $f'(x)$ IN $x_0^-$ E $x_0^+$ | TANGENTE | ESEMPIO |
|---|---|---|---|
| **Derivabile** | finiti e uguali | una sola, non verticale | $x^2$ |
| **Punto angoloso** | finiti e diversi | due semitangenti diverse | $\lvert x \rvert$ |
| **Flesso a tangente verticale** | stesso infinito ($+\infty, +\infty$ oppure $-\infty, -\infty$) | verticale, il grafico la attraversa | $\sqrt[3]{x}$ |
| **Cuspide** | infiniti di segno opposto | verticale, rami dalla stessa parte | $\sqrt{\lvert x \rvert}$, $\sqrt[3]{x^2}$ |
| **Non continua** | non si studia | non esiste | salto, funzione di Heaviside |