Tabella delle derivate

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Le derivate fondamentali con le condizioni in cui valgono, le regole di derivazione e la tabella per le funzioni composte, con qualche esempio.

1 Derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$	DOVE VALE
$y = k$	$y' = 0$	k costante
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$ e $x > 0$; con $n \in \mathbb{N}$ per ogni x; con n intero negativo per $x \neq 0$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
$y = e^x$	$y' = e^x$	per ogni x
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$a > 0$, per ogni x
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	per ogni x
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	per ogni x
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$	$x \neq k\pi$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	per ogni x
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	per ogni x

In $x = \pm 1$ le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ non sono derivabili: la tangente al grafico è verticale.

Casi particolari utili

$f(x)$	$f'(x)$	DOVE VALE
$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$
$y = \lvert x\rvert$	$y' = \dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	$x \neq 0$ (in 0 c'è un punto angoloso)

2 Regole di derivazione

REGOLA 1 · LINEARITÀ

$$D\big[k\,f(x) + h\,g(x)\big] = k\,f'(x) + h\,g'(x)$$

con k e h costanti.

REGOLA 2 · PRODOTTO

$$D\big[f(x)\cdot g(x)\big] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

REGOLA 3 · QUOZIENTE

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}$$

per $g(x) \neq 0$. Caso particolare: $D\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

REGOLA 4 · FUNZIONE COMPOSTA

$$D\Big[g\big(f(x)\big)\Big] = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

Nella notazione di Leibniz, con $y = g(u)$ e $u = f(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

REGOLA 5 · FUNZIONE INVERSA

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{con } y_0 = f(x_0) \text{ e } f'(x_0) \neq 0$$

Con questa regola si ricavano le derivate di $\ln x$ da e^x e quelle delle funzioni inverse trigonometriche.

REGOLA 6 · POTENZA CON BASE E ESPONENTE VARIABILI

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

per $f(x) > 0$. Si ottiene scrivendo $f^g = e^{g \ln f}$ e applicando la regola della composta.

! ERRORE COMUNE

La derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate

SBAGLIATO $D[f \cdot g] = f' \cdot g' \qquad D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'}{g'}$

CORRETTO $D[f \cdot g] = f'g + fg' \qquad D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Per controllare: $D[x \cdot x] = D[x^2] = 2x$, mentre $D[x] \cdot D[x] = 1$.

3 Derivate di funzioni composte

Quando l'argomento non è x ma una funzione $f(x)$, ogni derivata della tabella si moltiplica per $f'(x)$ (regola della composta).

y	y'
$[f(x)]^n$	$n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\,\ln a \cdot f'(x)$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\arcsin f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$\arccos f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

y	y'
$\arctan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$\operatorname{arccot} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

ESEMPI

$D\big[\sin(x^2)\big] = 2x\cos(x^2)$ $\quad D\big[x\,e^x\big] = e^x + x\,e^x = e^x(1+x)$ $\quad D\left[\dfrac{x}{1+x^2}\right] = \dfrac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$$D\big[\ln(x^2+1)\big] = \frac{2x}{x^2+1} \qquad D\big[\arctan(3x)\big] = \frac{3}{1+9x^2} \qquad D\big[x^x\big] = x^x(\ln x + 1)$$