Sviluppi di Taylor e Maclaurin

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Lo sviluppo di Taylor approssima una funzione, in un intorno di un punto, con un polinomio. Qui trovi la formula con il resto, le regole del simbolo o, la tabella degli sviluppi notevoli e il modo di usarli nei limiti.

1 Sviluppo di Taylor

Lo sviluppo di Taylor di una funzione in un intorno di x_0 permette di esprimere la funzione come un polinomio. Se lo arrestiamo al grado n dobbiamo aggiungere un **resto**, che rappresenta ciò che abbiamo trascurato. Proseguendo all'infinito si ottiene la **serie di Taylor**, che però converge solo in certi intervalli.

FORMULA 1 · TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big)$$

per $x \to x_0$, con f derivabile n volte in x_0. Il polinomio è unico: se $f(x) = P(x) + o\big((x-x_0)^n\big)$ con P di grado $\le n$, allora P è il polinomio di Taylor.

Il termine $o\big((x-x_0)^n\big)$ si chiama **resto di Peano** e si legge «o piccolo di $(x-x_0)^n$». È un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o\big((x-x_0)^n\big)}{(x-x_0)^n} = 0$$

FORMULA 2 · RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con ξ compreso tra x_0 e x, se f è derivabile $n+1$ volte nell'intervallo tra x_0 e x. Dà una stima dell'errore, non solo l'ordine di grandezza.

1.1 Regole di calcolo con il simbolo o

Per $x \to 0$ e $k, h > 0$ valgono le seguenti regole (le uguaglianze vanno lette da sinistra a destra):

$o(x^k) \pm o(x^k) = o(x^k)$	$o(x^k) \cdot o(x^h) = o(x^{k+h})$
$o(x^k) + o(x^h) = o\big(x^{\min\{k,h\}}\big)$	$x^h \cdot o(x^k) = o(x^{k+h})$
$c \cdot o(x^k) = o(x^k)$ per c costante	$o(x^k) = o(x^h)$ se $h \le k$

ERRORE COMUNE

$o(x^k)$ non è un numero

SBAGLIATO $o(x^2) - o(x^2) = 0$

CORRETTO $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$

Il simbolo indica una classe di funzioni: due $o(x^2)$ non si annullano tra loro, ma restano un $o(x^2)$.

2 Sviluppo di Maclaurin

Se $x_0 = 0$ lo sviluppo di Taylor si chiama sviluppo di **Maclaurin**. Per sviluppare in un punto $x_0 \neq 0$ si pone $t = x - x_0$ e ci si riconduce a $t \to 0$.

FORMULA 3 · MACLAURIN

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

Nelle tabelle seguenti $x \to 0$. L'ultima colonna indica dove converge la serie infinita.

Potenze, esponenziali e logaritmi

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$	$\lvert x\rvert < 1$ (se $\alpha \notin \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\lvert x\rvert < 1$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	per ogni x
$a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2}\ln^2 a + \frac{x^3}{6}\ln^3 a + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ln^n a + o(x^n)$	per ogni x, $a > 0$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$-1 \leq x < 1$

Il coefficiente binomiale generalizzato è $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Casi particolari:

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$	$\lvert x\rvert < 1$

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$	$\lvert x\rvert < 1$

Funzioni trigonometriche

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	per ogni x
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	per ogni x
$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945}x^5 + o(x^6)$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7)$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + o(x^6)$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$

Nello sviluppo di $\cot x$ e di $\csc x$ compare $\frac{1}{x}$: è uno sviluppo in serie di Laurent, valido per $x \neq 0$.

Funzioni trigonometriche inverse

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2\,(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\lvert x\rvert \leq 1$
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \cdots - \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2\,(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\lvert x\rvert \leq 1$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\lvert x\rvert \leq 1$
$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\lvert x\rvert \leq 1$

Funzioni iperboliche

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	per ogni x
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	per ogni x

SVILUPPO DI MACLAURIN	CONVERGE PER
$\tanh x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 - \dfrac{17}{315}x^7 + \dfrac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$

3 Come si usano gli sviluppi

METODO · FINO A CHE ORDINE SVILUPPARE

Nei limiti sviluppa numeratore e denominatore fino all'ordine in cui compare il **primo termine che non si annulla**. Con un'approssimazione troppo corta resta un $o(\cdot)$ che non permette di concludere; con una troppo lunga fai solo calcoli inutili. Per i quozienti conviene arrivare almeno al grado del denominatore.

ESEMPIO 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{6}$$

Con $\sin x = x + o(x)$ non si poteva concludere: il numeratore sarebbe rimasto $o(x)$.

ESEMPIO 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

$$\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4} \longrightarrow \frac{1}{24}$$

ESEMPIO 3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

$$\frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

Per $\sin x$ basta $x + o(x^2)$, perché il termine in x^2 è nullo.

ESEMPIO 4 Sviluppo di $\sin x$ con la formula 3

Le derivate in 0 si ripetono con periodo 4: $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ -\sin 0 = 0,\ -\cos 0 = -1,\ \ldots$ I termini di grado pari si annullano, quindi:

$$\sin x = 0 + 1\cdot x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$