Teoremi del calcolo differenziale

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Rolle, Lagrange, Cauchy e de L'Hôpital: per ogni teorema trovi l'enunciato, il significato geometrico e la dimostrazione. I teoremi si appoggiano uno sull'altro: Rolle porta a Lagrange, Lagrange a Cauchy e Cauchy a de L'Hôpital.

0 Due strumenti di partenza

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se f è continua in $[a;b]$, allora f ha in $[a;b]$ un **massimo** M e un **minimo** m: esistono $x_M, x_m \in [a;b]$ tali che $m = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = M$ per ogni $x \in [a;b]$.

TEOREMA DI FERMAT

Se c è un punto interno all'intervallo, f è derivabile in c e c è un punto di massimo o di minimo (anche solo locale), allora $f'(c) = 0$. In un massimo o in un minimo interno la tangente è orizzontale.

DIMOSTRAZIONE

Sia c un punto di massimo (per il minimo il ragionamento è identico): $f(x) \le f(c)$ vicino a c. Il rapporto incrementale $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ha il numeratore ≤ 0. Per $h > 0$ il rapporto è ≤ 0, quindi passando al limite $f'(c) \le 0$. Per $h < 0$ il rapporto è ≥ 0, quindi $f'(c) \ge 0$. Dato che f è derivabile, i due limiti coincidono: $f'(c) = 0$.

1 Teorema di Rolle

TEOREMA 1 · ROLLE

IPOTESI

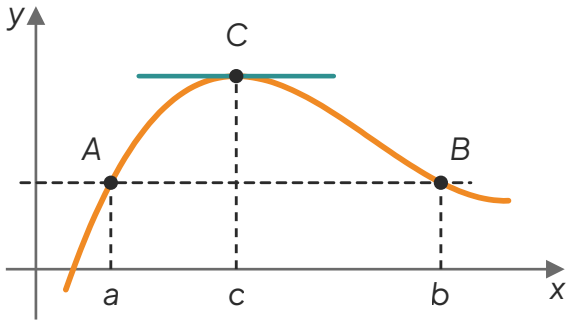
1) $f(x)$ è continua in $[a;b]$;
2) $f(x)$ è derivabile in $(a;b)$;
3) f assume valori uguali negli estremi, cioè $f(a) = f(b)$.

TESI

$$\exists\, c \in (a;b) \;:\; f'(c) = 0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Se il grafico di una funzione continua e senza spigoli parte e arriva alla stessa quota, c'è almeno un punto in cui la tangente è **orizzontale**: cioè parallela alla retta per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, che qui è orizzontale. Il punto c non è per forza al centro dell'intervallo e non è per forza unico.



In C la tangente è parallela ad AB.

DIMOSTRAZIONE

Poiché f è continua in $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass ha un massimo M e un minimo m. Distinguiamo due casi.

Se $M = m$, la funzione è costante e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a; b)$: ogni punto dell'intervallo va bene.

Se $M > m$, M e m non possono essere assunti entrambi solo negli estremi: siccome $f(a) = f(b)$, negli estremi f ha un solo valore, che non può essere sia M sia m. Quindi almeno uno dei due è assunto in un punto c interno ad $(a; b)$. In c la funzione è derivabile e ha un massimo o un minimo, perciò per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$.

■

Le ipotesi servono. $f(x) = |x|$ in $[-1; 1]$ è continua e $f(-1) = f(1)$, ma non è derivabile in 0: la sua derivata vale ± 1 e non si annulla mai.

2 Teorema di Lagrange

TEOREMA 2 · LAGRANGE

IPOTESI

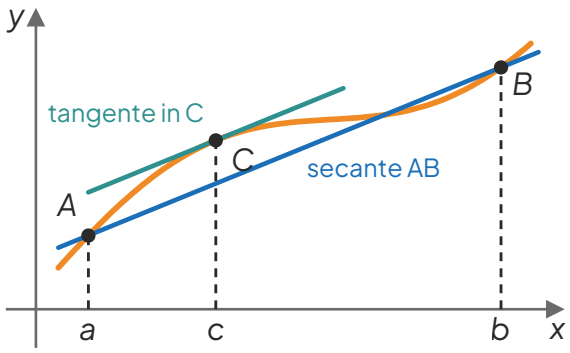
1) $f(x)$ è continua in $[a; b]$;
2) $f(x)$ è derivabile in $(a; b)$.

TESI

$$\exists\, c \in (a; b) \ : \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Il rapporto $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della **secante** per A e B; $f'(c)$ è quello della **tangente** in C. Il teorema dice che sul grafico c'è almeno un punto in cui la tangente è **parallela alla secante**. Con la velocità: la velocità media su un intervallo è uguale alla velocità istantanea in almeno un istante.



La tangente in C è parallela alla secante AB.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, cioè la differenza tra f e la retta per A e B (la distanza verticale tra il grafico e la secante).

φ è continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$, perché lo sono f e una retta. Inoltre $\varphi(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0$. Per il teorema di Rolle esiste $c \in (a;b)$ con $\varphi'(c) = 0$. Poiché $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, otteniamo $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

■

Rolle è un caso particolare: se $f(a) = f(b)$ la secante è orizzontale e la tesi diventa $f'(c) = 0$. **Le ipotesi servono:** $f(x) = |x|$ in $[-1;2]$ ha secante di coefficiente angolare $\frac{1}{3}$, ma $f'(x) = \pm 1$ ovunque esista.

2.1 Conseguenze del teorema di Lagrange

Criterio di derivabilità

TEOREMA 3 · CRITERIO DI DERIVABILITÀ

IPOTESI

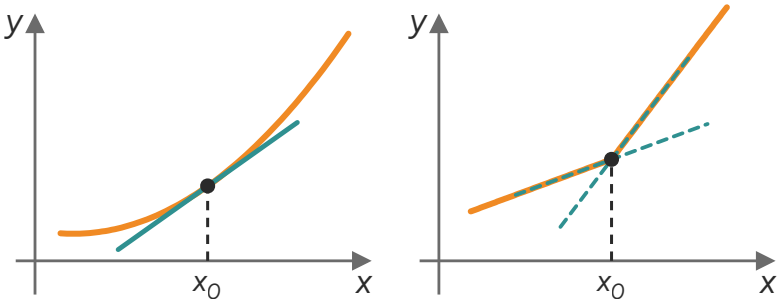
1) $f(x)$ è continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$, a eccezione al più del punto $x_0 \in (a;b)$;
2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = l$, con l finito.

TESI

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) = l$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Se le pendenze delle tangenti, avvicinandosi a x_0 da sinistra e da destra, tendono allo stesso valore l, il grafico non ha spigoli in x_0: ha una tangente di coefficiente angolare l. Se i due limiti sono diversi c'è un **punto angoloso**. Se i limiti sono infiniti la tangente è verticale e f **non** è derivabile in x_0.



limiti uguali: derivabile — *limiti diversi: punto angoloso*

DIMOSTRAZIONE

Da destra. Per $x \in (x_0;b)$ la funzione è continua in $[x_0;x]$ e derivabile in $(x_0;x)$. Per il teorema di Lagrange esiste $\xi_x \in (x_0;x)$ tale che $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_x)$. Quando $x \to x_0^+$ anche $\xi_x \to x_0^+$, perché $x_0 < \xi_x < x$: quindi il rapporto incrementale tende a l, cioè $f'_+(x_0) = l$.

Da sinistra. Lo stesso ragionamento su $[x;x_0]$, con $x < x_0$, dà $f'_-(x_0) = l$.

Le derivate destra e sinistra sono uguali, quindi f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$.

■

Funzioni crescenti e decrescenti

TEOREMA 4 · SEGNO DELLA DERIVATA

IPOTESI

1) $f(x)$ è continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I.

TESI

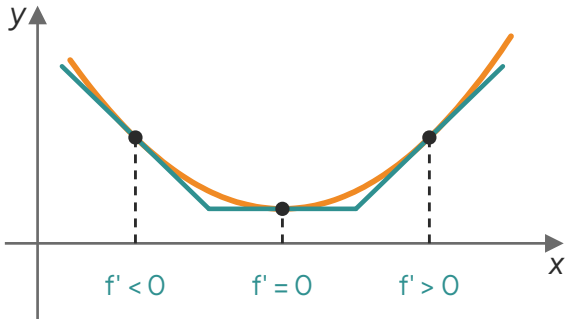
$$f'(x) > 0 \ \forall x \text{ interno} \ \Rightarrow \ f \text{ è crescente in } I$$
$$f'(x) < 0 \ \forall x \text{ interno} \ \Rightarrow \ f \text{ è decrescente in } I$$
$$f'(x) = 0 \ \forall x \text{ interno} \ \Rightarrow \ f \text{ è costante in } I$$

INVERSO

Se f è crescente in I allora $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno; se è decrescente allora $f'(x) \leq 0$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

La derivata è il coefficiente angolare della tangente: dove è positiva la tangente sale e il grafico sale, dove è negativa scende, dove è nulla la tangente è orizzontale. Nell'inverso compare ≥ 0 e non > 0: $f(x) = x^3$ è crescente ma $f'(0) = 0$.



DIMOSTRAZIONE

Diretto. Siano $x_1 < x_2$ in I. Per il teorema di Lagrange in $[x_1; x_2]$ esiste $c \in (x_1; x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$, con $x_2 - x_1 > 0$. Se $f'(c) > 0$ allora $f(x_2) > f(x_1)$ (crescente); se $f'(c) < 0$ allora $f(x_2) < f(x_1)$ (decrescente); se $f'(c) = 0$ allora $f(x_2) = f(x_1)$ (costante).

Inverso. Sia f crescente e x_0 interno. Per ogni $h \neq 0$ i numeri $f(x_0 + h) - f(x_0)$ e h hanno lo stesso segno, quindi $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$. Passando al limite per $h \to 0$, per la permanenza del segno $f'(x_0) \geq 0$. Per le funzioni decrescenti il rapporto è ≤ 0.

■

Conseguenza: due funzioni con la stessa derivata in un intervallo differiscono per una costante, perché $h = f - g$ ha $h' = 0$ e quindi è costante. È il motivo per cui le primitive di una funzione sono tutte del tipo $F(x) + c$.

3 Teorema di Cauchy

TEOREMA 5 · CAUCHY

IPOTESI

1) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a; b]$;

2) $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $(a; b)$;

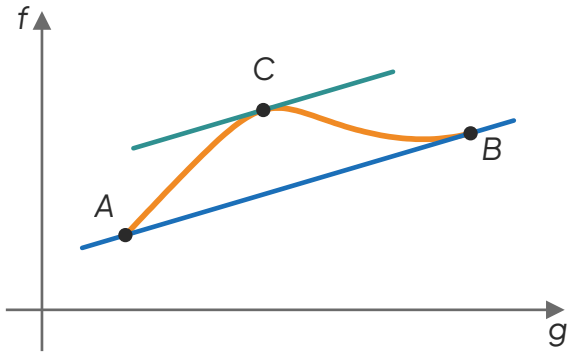
3) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a; b)$.

TESI

$$\exists\, c \in (a; b) \ : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Immagina il punto $P(t) = \big(g(t); f(t)\big)$ che percorre una curva al variare di $t \in [a;b]$. Il rapporto a sinistra è il coefficiente angolare della **corda** AB; il rapporto $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ è quello della **tangente** alla curva. Il teorema dice che c'è un punto C della curva in cui la tangente è parallela alla corda AB: è Lagrange per curve date in forma parametrica.



La tangente in C è parallela alla corda AB.

DIMOSTRAZIONE

Prima osserviamo che $g(b) \neq g(a)$: se fosse $g(a) = g(b)$, per Rolle esisterebbe $\xi \in (a;b)$ con $g'(\xi) = 0$, contro l'ipotesi 3. Consideriamo allora la funzione

$$h(x) = f(x)\,\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\,\big(f(b) - f(a)\big)$$

h è continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$. Calcolando, $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. Per il teorema di Rolle esiste $c \in (a;b)$ con $h'(c) = 0$:

$$f'(c)\,\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\,\big(f(b) - f(a)\big)$$

Dividendo per $g'(c) \neq 0$ e per $g(b) - g(a) \neq 0$ si ottiene la tesi.

■

Lagrange è un caso particolare: con $g(x) = x$ si ha $g(b) - g(a) = b - a$ e $g'(c) = 1$.

4 Teorema di de L'Hôpital

TEOREMA 6 · DE L'HÔPITAL

IPOTESI

1) $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in un intorno di x_0 (escluso al più x_0), con $g'(x) \neq 0$ in tale intorno;
2) per $x \to x_0$ si ha $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, oppure $|f(x)| \to +\infty$ e $|g(x)| \to +\infty$ (forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$);
3) esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, finito o infinito.

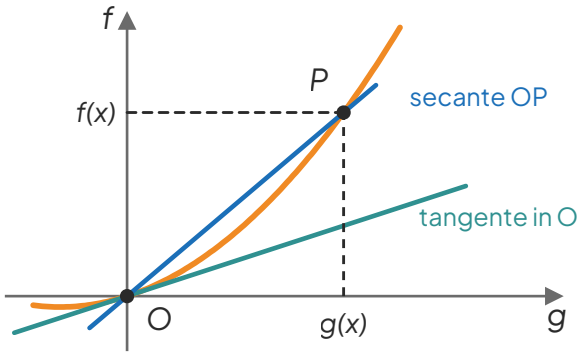
TESI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Vale per x_0 finito oppure $x_0 = \pm\infty$, e anche per i soli limiti destro o sinistro.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Considera la curva $\big(g(x); f(x)\big)$: per $x \to x_0$ passa per l'origine O. Il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è il coefficiente angolare della **secante** OP; il rapporto $\dfrac{f'}{g'}$ è quello della **tangente** in O. Quando P tende a O la secante tende alla tangente. Con altre parole, vicino a x_0 si ha $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ e $g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$.



La secante OP tende alla tangente in O.

DIMOSTRAZIONE

Caso $\frac{0}{0}$ con x_0 finito. Trattiamo il limite destro, il sinistro è identico. Poniamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (non cambia i limiti): così f e g sono continue in $[x_0; x]$. Per il teorema di Cauchy in $[x_0; x]$ esiste $\xi \in (x_0; x)$ con

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

($g(x) \neq 0$ perché $g(x) = g'(\eta)(x - x_0)$ con $g'(\eta) \neq 0$.) Fissato $\varepsilon > 0$, per s abbastanza vicino a x_0 si ha $\left|\frac{f'(s)}{g'(s)} - L\right| < \varepsilon$; poiché $x_0 < \xi < x$, lo stesso vale per ξ e quindi $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$. Dunque $\frac{f}{g} \to L$.

Caso $\frac{0}{0}$ con $x_0 = +\infty$. Poniamo $t = \frac{1}{x}$, $F(t) = f(\frac{1}{t})$, $G(t) = g(\frac{1}{t})$, con $t \to 0^+$. Si ha $\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \dfrac{-f'(\frac{1}{t})/t^2}{-g'(\frac{1}{t})/t^2} = \dfrac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} \to L$, e si applica il caso precedente.

Caso $\frac{\infty}{\infty}$ (limite destro in x_0, L finito). Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $y > x_0$ vicino a x_0 in modo che $\left|\frac{f'(s)}{g'(s)} - L\right| < \varepsilon$ per $s \in (x_0; y)$. Per $x \in (x_0; y)$ il teorema di Cauchy in $[x; y]$ dà $\xi \in (x; y)$ con $\Phi(x) := \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, quindi $|\Phi(x) - L| < \varepsilon$. Con un po' di algebra

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \Phi(x) \cdot \Psi(x) \qquad \text{con} \qquad \Psi(x) = \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}$$

Per $x \to x_0^+$ si ha $f(x), g(x) \to \infty$, quindi $\frac{g(y)}{g(x)} \to 0$, $\frac{f(y)}{f(x)} \to 0$ e $\Psi(x) \to 1$. Perciò per x vicino a x_0 il rapporto $\frac{f}{g}$ è compreso tra valori vicini a $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$; dato che ε è arbitrario, $\frac{f}{g} \to L$. I casi con $L = \pm\infty$, con limite sinistro o con $x_0 = \pm\infty$ si trattano in modo analogo (o con $t = \frac{1}{x}$).

■

ERRORE COMUNE

Usare de L'Hôpital senza una forma indeterminata

SBAGLIATO $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1}=1$

CORRETTO $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$

Il limite non è $\frac{0}{0}$ né $\frac{\infty}{\infty}$: basta sostituire. Prima di derivare controlla sempre la forma. Le altre forme indeterminate ($0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ...) vanno prima trasformate in un quoziente.

ESEMPIO 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

ESEMPIO 2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

L'inverso non vale. Con $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=x$ in $x_0=0$ si ha $\frac{f}{g}=x\sin\frac{1}{x}\to 0$, ma $\frac{f'}{g'}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ non ha limite: l'ipotesi 3 non è un dettaglio.

5 Schema riassuntivo

TEOREMA	IPOTESI	TESI	GEOMETRIA
Rolle	f continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$, $f(a)=f(b)$	$f'(c)=0$	tangente orizzontale
Lagrange	f continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$	tangente parallela alla secante
Cauchy	f,g come sopra, $g'\neq 0$ in $(a;b)$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$	tangente parallela alla corda (curva parametrica)
de L'Hôpital	forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, esiste $\lim\frac{f'}{g'}$	$\lim\dfrac{f}{g}=\lim\dfrac{f'}{g'}$	la secante tende alla tangente