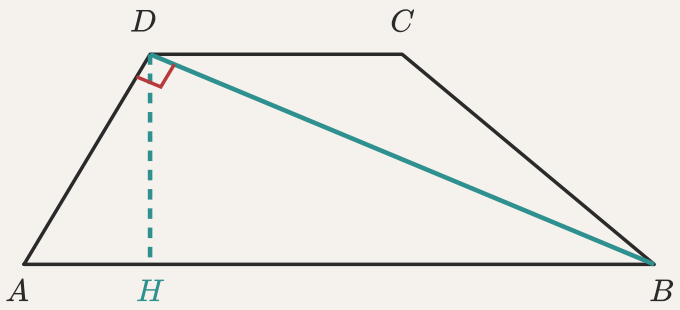
Soluzioni problemi di Euclide con l'algebra

1. Nel trapezio ABCD, la diagonale maggiore BD è perpendicolare al lato obliquo AD e la base minore è congruente all'altezza. Sapendo che la base maggiore è lunga $20\,\text{cm}$ e la proiezione del lato AD su di essa è lunga $4\,\text{cm}$, determina l'aerea del trapezio.



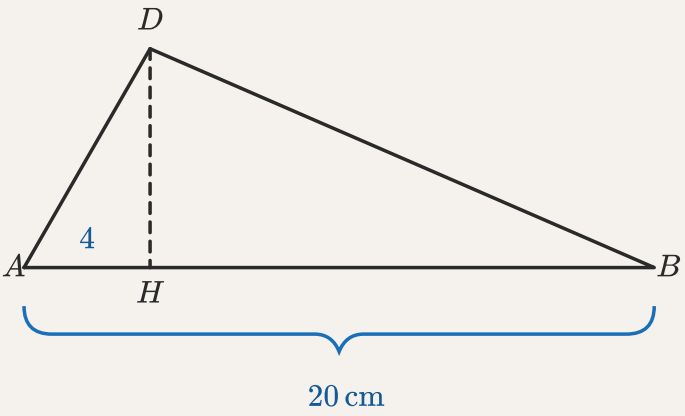
$$DC \cong DH$$

$$AB = 20\,\text{cm}$$

$$AH = 4\,\text{cm}$$

$$A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot DH}{2}$$

Considero il triangolo ADB



1° TH EUCLIDE

$$AD^2 = 4 \cdot 20$$

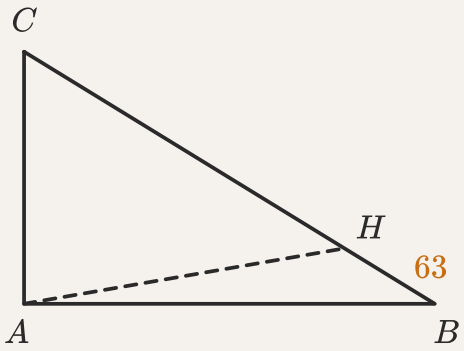
$$AD = 4\sqrt{5}$$

TH DI PITAGORA

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{80 - 16} = 8$$

$$A = \frac{(20\,\text{cm} + 8\,\text{cm}) \cdot 8\,\text{cm}}{2} = \frac{28\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}}{2} = 112\,\text{cm}^2$$

2. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, la proiezione BH di AB sull'ipotenusa è lunga $63\,\text{cm}$ e $CH = 2BH - 14\,\text{cm}$. Calcola l'area del triangolo ABH.



$$BH = 63\,\text{cm}$$

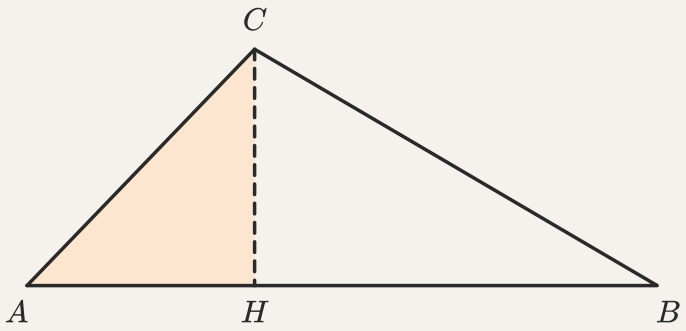
$$CH = 2BH - 14\,\text{cm} = 2 \cdot 63\,\text{cm} - 14\,\text{cm} = 112\,\text{cm}$$

$$A_{ABH} = \frac{AH \cdot BH}{2} = \frac{84\,\text{cm} \cdot 63\,\text{cm}}{2} = 2646\,\text{cm}$$

$AH^2 = CH \cdot BH$ 2° TH EUCLIDE

$$AH = \sqrt{CH \cdot BH} = \sqrt{112\,\text{cm} \cdot 63\,\text{cm}} = 84\,\text{cm}$$

3. In un triangolo rettangolo un cateto è lungo $60\,\text{cm}$ e la sua proiezione sull'ipotenusa è $\frac{4}{3}$ dell'altezza relativa all'ipotenusa. Trovare il perimetro e l'area del triangolo.



$$AC = 60\,\text{cm}$$

$$AH = \frac{4}{3} \cdot CH$$

Pongo $CH = x$ e applico il teorema di Pitagora

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$60^2 = \left(\frac{4}{3}x\right)^2 + x^2$$

$$3600 = \frac{16}{9}x^2 + x^2$$

$$3600 = \frac{16x^2 + 9x^2}{9}$$

$$x^2 = \frac{3600 \cdot 9}{25}$$

$$x = \frac{\overset{12}{\cancel{60}} \cdot 3}{\cancel{5}} = 36\,\text{cm}$$

$$AH = \frac{4}{3} \cdot CH = \frac{4}{3} \cdot 36 = 48\,\text{cm}$$

Trovo HB

$$CH^2 = AH \cdot HB$$ 2° TH EUCLIDE

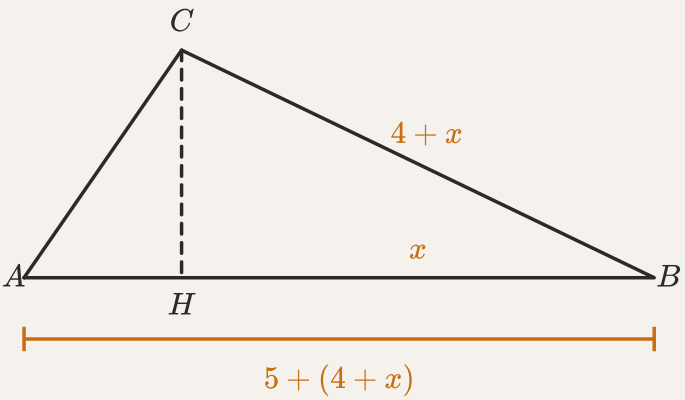
$$HB = \frac{CH^2}{AH} = \frac{36^2}{48} = 27\,\text{cm}$$

Quindi

$$AB = AH + HB = 48\,\text{cm} + 27\,\text{cm} = 75\,\text{cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{75\,\text{cm} \cdot 36\,\text{cm}}{2} = 1350\,\text{cm}^2$$

4. Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo supera di $4\,\text{cm}$ la sua proiezione sull'ipotenusa; quest'ultima, a sua volta supera di $5\,\text{cm}$ il cateto maggiore. Determinare i lati del triangolo.



$$CB = 4\,\text{cm} + HB$$

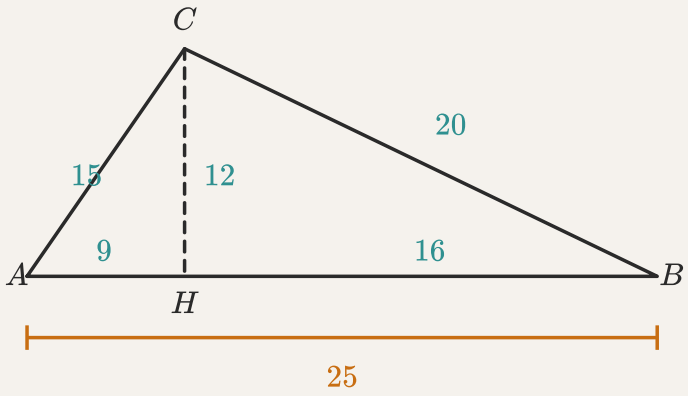
$$AB = 5\,\text{cm} + CB$$

Pongo $HB = x$

1° TH EUCLIDE

$$CB^2 = HB \cdot AB$$
$$(4+x)^2 = x \cdot [5 + (4+x)]$$
$$(4+x)^2 = x(9+x)$$

$$16 + \cancel{x^2} + 8x - 9x - \cancel{x^2} = 0$$
$$-x = -16$$
$$x = 16\,\text{cm}$$



$$AH = AB - HB = 25 - 16 = 9\,\text{cm}$$

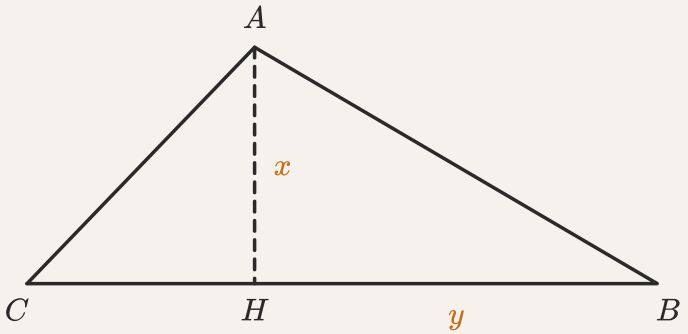
$$CH^2 = AH \cdot HB$$

2° TH DI EUCLIDE

$$CH = \sqrt{9 \cdot 16} = 12\,\text{cm}$$

$$AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,\text{cm}$$ PITAGORA

5. In un triangolo rettangolo ABC le proiezioni BH, HC dei cateti sull'ipotenusa differiscono di $7\,\text{cm}$. Determinare l'ipotenusa BC sapendo che $AH^2 - BH^2 = 63\,\text{cm}^2$.



$$|BH - HC| = 7\,\text{cm}$$

$$AH^2 - BH^2 = 63\,\text{cm}^2$$

Pongo $AH = x$

$HB = y$

$$\begin{cases} |y - HC| = 7\,\text{cm} \\ x^2 - y^2 = 63\,\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| y - \dfrac{x^2}{y} \right| = 7\,\text{cm} \\ x^2 - y^2 = 63\,\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \dfrac{y^2 - x^2}{y} \right| = 7\,\text{cm} \\ x^2 - y^2 = 63\,\text{cm}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{63\,\text{cm}^2}{7\,\text{cm}} = y \\ x^2 - y^2 = 63\,\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9\,\text{cm} \\ x^2 = 144\,\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9 \\ x = 12 \end{cases} \quad HC = \frac{12^2}{9} = 16\,\text{cm}$$

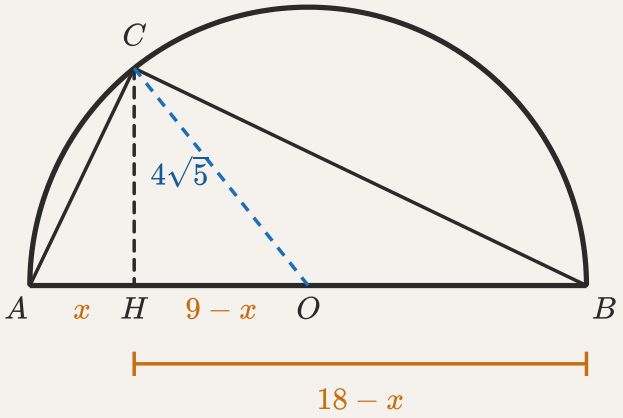
$$AH^2 = HC \cdot HB$$

$$x^2 = HC \cdot y \;\rightsquigarrow\; HC = \frac{x^2}{y}$$

2° TH DI EUCLIDE

$$BC = HC + HB = 16\,\text{cm} + 9\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$$

6. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo ABC sapendo che il $r = 9\,\text{cm}$ e l'altezza relativa all'ipotenusa è pari a $4\sqrt{5}\,\text{cm}$.



$$CH = 4\sqrt{5}\,\text{cm}$$

$$AO = 9\,\text{cm}$$

Pongo $AH = x$

Quindi

$$HO = 9\,\text{cm} - x$$

$$\begin{aligned} HB &= HO + OB \\ &= 9\,\text{cm} - x + 9\,\text{cm} \\ &= 18\,\text{cm} - x \end{aligned}$$

$$CH^2 = AH \cdot HB$$

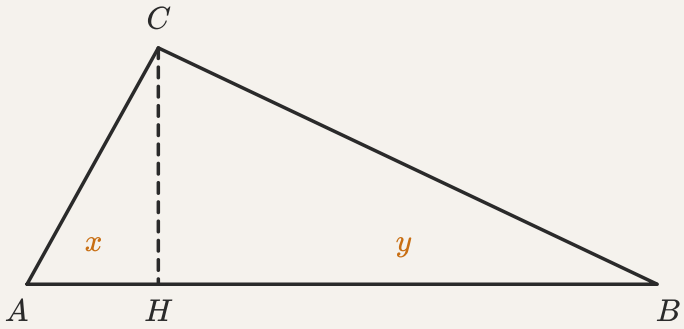
$$(4\sqrt{5})^2 = x \cdot (18 - x)$$

$$80 = 18x - x^2$$

$$x^2 - 18x + 80 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{81 - 80}}{1} = 8 \pm 1 \;\Rightarrow\; 9\,\text{cm} \;\text{ e }\; 7\,\text{cm}$$

7. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo divide l'ipotenusa in due parti che stanno tra loro come 5 sta a 12. Sapendo che l'ipotenusa è $68\,\text{cm}$, determina l'altezza relativa all'ipotenusa e i due cateti.



$$\overset{x}{AH} : \overset{y}{HB} = 5 : 12$$

$$AB = 68\,\text{cm}$$

$$\begin{cases} 5y = 12x \\ x + y = 68 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{12}{5}x \\ x + y = 68 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{12}{5}x \\ x + \dfrac{12}{5}x = 68 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{12}{5}x \\ 5x + 12x = 340 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{12}{\cancel{5}} \cdot \overset{4}{\cancel{20}} = 48 \\ x = 20 \end{cases} \qquad \begin{aligned} AH &= 20\,\text{cm} \\ BH &= 48\,\text{cm} \end{aligned}$$

$CH^2 = AH \cdot HB$ 2° TH DI EUCLIDE

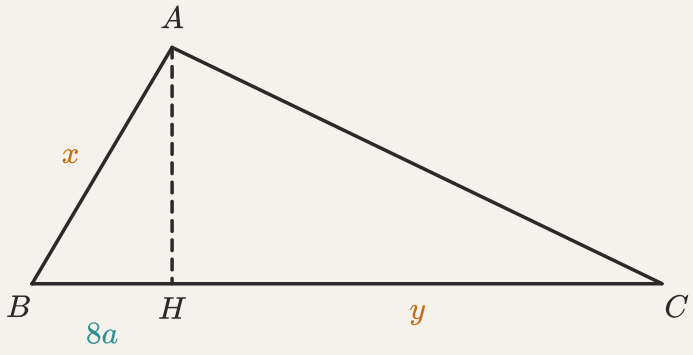
$$CH = \sqrt{48 \cdot 20} = \sqrt{16 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8\sqrt{15}\,\text{cm}$$

Applico il 1° Th di Euclide per trovare gli altri cateti:

$$AC^2 = AB \cdot AH \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{AB \cdot AH} = \sqrt{68 \cdot 20} = \sqrt{4 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 5} = 4\sqrt{85}\,\text{cm}$$

$$BC^2 = AB \cdot HB \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{AB \cdot HB} = \cdots = 8\sqrt{51}\,\text{cm}$$

8. Nel triangolo rettangolo ABC la proiezione HB del cateto AB sull'ipotenusa BC misura $8a$. Sapendo che $3\overline{HC} - \overline{AB} = \overline{HB}$, determina il perimetro del triangolo.



$$HB = 8a$$

$$3HC - AB = HB$$

Pongo $AB = x$ e $HC = y$

Imposto un sistema

$$\begin{cases} 3y - x = 8a \\ x^2 = 8a \cdot (8a + y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 8a \\ (3y - 8a)^2 = 8a(8a + y) \end{cases}$$

1° TH DI EUCLIDE

$$\begin{cases} x = 3y - 8a \\ 9y^2 + \cancel{64a^2} - 48ay = \cancel{64a^2} + 8ay \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 8a \\ 9y^2 - 56ay = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{y = 0} \qquad y = \frac{56}{9}a$$

NON ACCETT.

$$\begin{cases} y = \frac{56}{9}a \\ x = \cancel{3} \cdot \frac{56}{\cancel{9}_{3}}a - 8a = \frac{32}{3}a \end{cases}$$

$$AC = \sqrt{\frac{128}{9}a \cdot \frac{56}{9}a} = \cdots = \frac{32}{9}\sqrt{7}\,a$$

$$2p = \frac{128}{9}a + \frac{32}{9}\sqrt{7}\,a + \frac{32}{3}a = \frac{224 + 32\sqrt{7}}{9}\,a$$