FORMULARIO · LICEO · GONIOMETRIA

Equazioni goniometriche omogenee e non omogenee

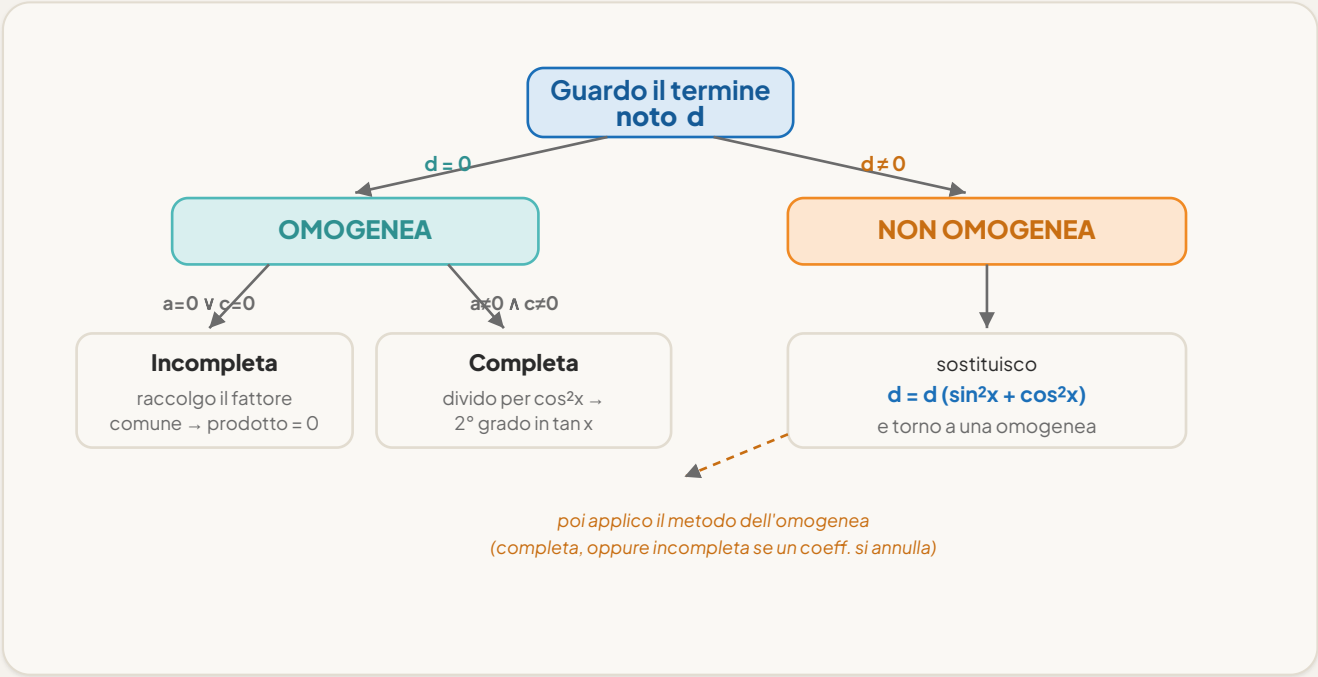
Sono le equazioni in cui $\sin x$ e $\cos x$ compaiono al secondo grado: ogni termine è di grado due (come $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$, $\cos^2 x$), eventualmente con un termine noto d. La forma generale è

FORMA GENERALE

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0$$

COME RICONOSCERE IL CASO

Schema di classificazione



Il termine noto d decide tutto: se è nullo l'equazione è già omogenea, altrimenti lo si elimina riscrivendo d con la relazione fondamentale.

PROCEDIMENTO

Il metodo, caso per caso

CASO 1 · D = 0 · OMOGENEA INCOMPLETA

Manca $\sin^2 x$ oppure $\cos^2 x$ a = 0 oppure c = 0

Se manca un quadrato, raccogli il fattore comune e annulla ciascun fattore. Con $a = 0$ raccogli $\cos x$, con $c = 0$ raccogli $\sin x$:

$$\cos x\,(b\sin x + c\cos x) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin x\,(a\sin x + b\cos x) = 0$$

Ogni fattore uguagliato a zero dà un'equazione elementare ($\cos x = 0$, $\sin x = 0$, o un'equazione lineare in $\sin x, \cos x$).

CASO 2 · D = 0 · OMOGENEA COMPLETA

Ci sono entrambi i quadrati a≠0 e c≠0

Poiché $a \neq 0$, l'angolo con $\cos x = 0$ non è soluzione (sostituendo si otterrebbe $a = 0$): puoi dividere tutto per $\cos^2 x$ e ottieni un'equazione di secondo grado in $\tan x$.

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0 \implies \tan x = t \;\Rightarrow\; x = \arctan t + k\pi$$

CASO 3 · D ≠ 0 · NON OMOGENEA

C'è il termine noto: riconducila a omogenea

Riscrivi il termine noto sfruttando la relazione fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, cioè $d = d\,(\sin^2 x + \cos^2 x)$. I quadrati assorbono d e l'equazione diventa omogenea:

$$(a + d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c + d)\cos^2 x = 0$$

Ora applichi il Caso 2. Attenzione: se $a + d = 0$ oppure $c + d = 0$ ricadi nel Caso 1 (raccoglimento).

ERRORE COMUNE

Dividere per $\cos^2 x$ senza controllare se $\cos x = 0$ è soluzione

La divisione per $\cos^2 x$ è lecita solo quando $\cos x = 0$ **non** è soluzione, cioè quando $a \neq 0$. Se $a = 0$, allora $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione e dividendo la perderesti: in quel caso usa il raccoglimento. Verifica sempre prima di dividere.

ESERCIZI SVOLTI

Tipo 1 · Omogenea incompleta

ESERCIZIO 1.1 MANCA $\cos^2 x \cdot C = 0$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$

SVOLGIMENTO

- Raccolgo $\sin x$: $\sin x\,(\sin x - \cos x) = 0$
- Annullo il primo fattore: $\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$
- Annullo il secondo: $\sin x - \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = 1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

SOLUZIONI $x = k\pi \;\vee\; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

ESERCIZIO 1.2 MANCA $\sin^2 x \cdot A = 0$

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

SVOLGIMENTO

- Raccolgo $\cos x$: $\cos x\,(\sin x + \cos x) = 0$
- Primo fattore: $\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- Secondo fattore: $\sin x + \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = -1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

SOLUZIONI $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\vee\; x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

ESERCIZI SVOLTI

Tipo 2 · Omogenea completa

ESERCIZIO 2.1 A≠0, C≠0 · DIVIDO PER COS²X

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$$

SVOLGIMENTO

- $a = 1 \neq 0$: $\cos x = 0$ non è soluzione, posso dividere per $\cos^2 x$.
- Divido: $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$
- Pongo $t = \tan x$: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \vee t = 3$
- $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $\tan x = 3 \Rightarrow x = \arctan 3 + k\pi$

SOLUZIONI $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \arctan 3 + k\pi$

ESERCIZIO 2.2 A≠0, C≠0 · DIVIDO PER COS²X

$$2\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$$

SVOLGIMENTO

- $a = 2 \neq 0$: divido per $\cos^2 x \Rightarrow 2\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$
- $t = \tan x$: $2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = -1$
- $\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$; $\tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

SOLUZIONI $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

ESERCIZI SVOLTI

Tipo 3 · Non omogenea

ESERCIZIO 3.1 D≠0 · RICONDUCO A OMOGENEA

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$$

SVOLGIMENTO

- Porto a zero e scrivo $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$:
- $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$
- $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ (ora è omogenea completa)
- Divido per $\cos^2 x$: $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = 2$
- $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $\tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 + k\pi$

SOLUZIONI $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \arctan 2 + k\pi$

ESERCIZIO 3.2 D≠0 · CASO IN CUI RICADE NELL'INCOMPLETA

$$\sin^2 x + \sin x\cos x = 1$$

SVOLGIMENTO

- Scrivo $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ e porto a zero:
- $\sin^2 x + \sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
- Il termine in $\sin^2 x$ è sparito ($a + d = 0$): è diventata incompleta, raccolgo $\cos x$
- $\cos x\,(\sin x - \cos x) = 0$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

SOLUZIONI $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Promemoria: il termine noto d guida la scelta. Se $d = 0$ controlla subito se l'equazione è incompleta (raccoglimento) o completa (divisione per $\cos^2 x$); se $d \neq 0$ riscrivi $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ e torni a uno dei due casi precedenti.