Verifica di goniometria 1

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Nome e cognome _____ Classe _____ Data _____

Formule di addizione, sottrazione e duplicazione

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

1 Se α è un angolo acuto e $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, allora $\cos 2\alpha$ vale:

(A) $\frac{7}{25}$ (B) $-\frac{7}{25}$ (C) $\frac{24}{25}$ (D) $-\frac{24}{25}$

2 Siano α e β due angoli acuti con $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ e $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Quanto vale $\cos(\alpha+\beta)$?

(A) $\frac{63}{65}$ (B) $\frac{16}{65}$ (C) $\frac{33}{65}$ (D) $-\frac{33}{65}$

3 Se $\tan\alpha = 2$ e $\tan\beta = 3$, allora $\tan(\alpha+\beta)$ vale:

(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{5}{7}$ (D) $-\frac{5}{7}$

4 Il valore esatto di $\sin 15^\circ$ è:

(A) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5 Il valore esatto di $\tan 75^\circ$ è:

(A) $2+\sqrt{3}$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $1+\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

6 L'espressione $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ è uguale a:

(A) $\sqrt{3}\sin\alpha$ (B) $\sin\alpha$ (C) $\cos\alpha$ (D) $\sqrt{3}\cos\alpha$

7 Se α è acuto e $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, quanto vale $\tan 2\alpha$?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{4}{3}$

8 Per $\cos x \neq 0$, l'espressione $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ è uguale a:

(A) $\cot x$ (B) $2\tan x$ (C) $\tan x$ (D) $\sin x$

9 Se $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$, allora $\cos^2\alpha$ vale:

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{1}{8}$

10 Il valore di $\sin 20° \cos 25° + \cos 20° \sin 25°$ è:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sin 5°$

11 In un triangolo ABC si ha $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tan\beta = \frac{1}{3}$. Quanto vale $\tan\gamma$?

(A) 1 (B) $\frac{5}{6}$ (C) $-\frac{5}{6}$ (D) -1

12 Qual è la tangente dell'angolo acuto formato dalle rette $y = 2x$ e $y = 3x$?

(A) 7 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 5

13 Quante soluzioni ha l'equazione $\cos 2x = \cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi)$?

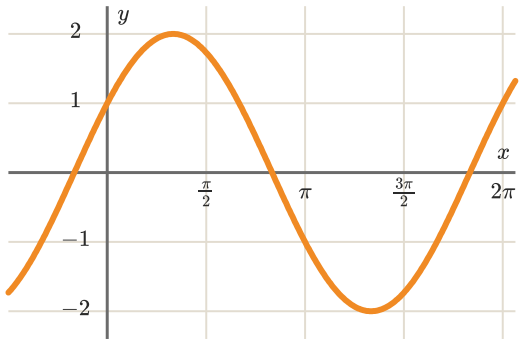
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

ASSOCIAZIONE

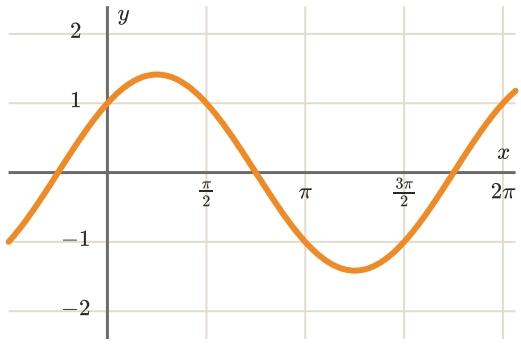
14 Associa a ogni funzione il suo grafico.

a $y = \sin x + \cos x$
b $y = \sin x - \cos x$
c $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$
d $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

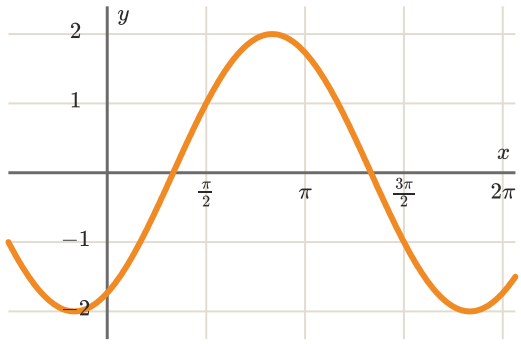
A



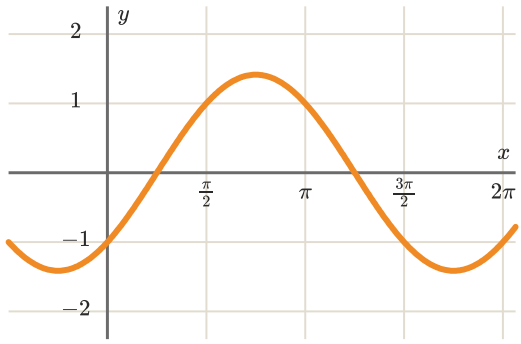
B



C



D



a → _____ **b** → _____ **c** → _____ **d** → _____

VERO O FALSO

15 Stabilisci se ciascuna affermazione è vera o falsa.

a L'uguaglianza $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ è vera per ogni coppia di angoli α e β. V F

b Per ogni α vale $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. V F

c Se α e β sono acuti con $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ e $\tan\beta=\frac{1}{3}$, allora $\alpha+\beta=45°$. V F

d Per ogni α vale $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$. V F

e $\tan 2\alpha$ è definita per ogni valore di α. V F

f Se i termini sono definiti, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. V F

DIMOSTRAZIONI

16 Dimostra la formula di duplicazione $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ e ricava da essa le due forme equivalenti $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ e $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

17 Dimostra la formula di triplicazione $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

18 Il valore di $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ è:

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (E) 1

19 Il prodotto $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$ vale:

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

20 Se $\sin x + \sin y = 1$ e $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$, quanto vale $\cos(x-y)$?

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $-\frac{3}{8}$

Soluzioni

1 B	**2** C	**3** A	**4** D	**5** A	**6** B	**7** D	**8** C	**9** B	**10** A
11 D	**12** C	**13** B	**18** B	**19** D	**20** E	**14** a→B b→D c→A d→C			
15 a F · b V · c V · d F · e F · f V				**16-17** dimostrazioni: vedi svolgimento					

1 **B** $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\dfrac{16}{25} = -\dfrac{7}{25}$.

2 **C** Con α, β acuti: $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$. Quindi $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5} - \dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{48-15}{65} = \dfrac{33}{65}$.

3 **A** $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$.

4 **D** $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5 **A** $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{(3+\sqrt{3})^2}{6} = 2+\sqrt{3}$.

6 **B** Per le formule di addizione i termini con $\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha$ si annullano e resta $2\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha = \sin\alpha$.

7 **D** $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

8 **C** $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \tan x$.

9 **B** $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{5}{8}$.

10 **A** È la formula di addizione del seno: $\sin(20^\circ + 25^\circ) = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11 **D** $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$, quindi $\alpha+\beta = 45^\circ$ e $\gamma = 135^\circ$: $\tan\gamma = -1$.

12 **C** $\tan\theta = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right| = \dfrac{3-2}{1+6} = \dfrac{1}{7}$.

13 **B** $\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = \pm x + 2k\pi$, cioè $x = 2k\pi$ oppure $x = \dfrac{2k\pi}{3}$. In $[0, 2\pi)$: $x = 0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$ (3 soluzioni).

14 Si distinguono con ampiezza e intercetta: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ (ampiezza $\sqrt{2}$, $y(0)=1$); $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ (ampiezza $\sqrt{2}$, $y(0)=-1$); $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ (ampiezza 2, $y(0)=1$); $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x-\frac{\pi}{3})$ (ampiezza 2, $y(0)=-\sqrt{3}$).
a→B **b**→D **c**→A **d**→C

15 **FVVFFV** **a** F (basta $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$: $0 \neq 2$). **b** V. **c** V: $\tan(\alpha + \beta) = 1$ con $\alpha + \beta$ acuto. **d** F (per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha $0 \neq 2$). **e** F (non è definita per $\alpha = \frac{\pi}{4}$). **f** V.

16 $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Con $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Con $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

17
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

18 **B** Posto $a = \cos 36°$ e $b = \cos 72° = 2a^2 - 1$, si ha $\cos 108° = -b$ e, per la triplicazione, $\cos 108° = 4a^3 - 3a$. Quindi $4a^3 - 3a = -(2a^2 - 1)$, cioè $(a + 1)(4a^2 - 2a - 1) = 0$, da cui $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$ e $b = 2a^2 - 1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Allora $a - b = \dfrac{1}{2}$.

19 **D** Moltiplicando e dividendo per $\sin\frac{\pi}{9}$ e usando $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ tre volte: il prodotto è $\dfrac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{1}{8}$, perché $\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{9}$.

20 **E** Elevando al quadrato e sommando: $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 2 + 2\cos(x - y)$. Quindi $2 + 2\cos(x - y) = 1 + \frac{1}{4}$ e $\cos(x - y) = -\dfrac{3}{8}$.