Verifica di goniometria 2

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

Nome e cognome _____ Classe _____ Data _____

Formule di bisezione e parametriche, funzioni inverse, angolo aggiunto

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

1 Se α è acuto e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, allora $\sin\frac{\alpha}{2}$ vale:

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

2 Se α è acuto e $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, allora $\tan\frac{\alpha}{2}$ vale:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

3 Il valore esatto di $\sin\frac{\pi}{8}$ è:

(A) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

4 Se $\tan\frac{x}{2} = 2$, quanto vale $\cos x$?

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $-\frac{3}{5}$

5 Se $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, quanto vale $\cos\frac{\alpha}{2}$?

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$

6 Se $\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, quanto vale $\tan x$?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$

7 La funzione $y = \sin x - \cos x$ può essere scritta come:

(A) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (D) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

8 Il valore di $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ è:

(A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

9 Il valore di $\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)$ è:

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{3}{10}$

10 Il valore di $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{5}{13}\right)$ è:

(A) $\frac{33}{65}$ (B) $\frac{56}{65}$ (C) $\frac{63}{65}$ (D) $\frac{16}{65}$

11 Il valore massimo della funzione $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ è:

(A) $\sqrt{3}+1$ (B) 2 (C) 4 (D) $\sqrt{2}$

12 Le soluzioni dell'equazione $\sin x+\cos x=1$ in $[0,2\pi)$ sono:

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $0,\ \pi$ (C) $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$ (D) $0,\ \frac{\pi}{2}$

13 Il periodo della funzione $y=2\sin 3x-\cos\frac{x}{2}$ è:

(A) 4π (B) 2π (C) 12π (D) $\frac{2\pi}{3}$

ASSOCIAZIONE

14 Associa a ogni funzione il suo grafico.

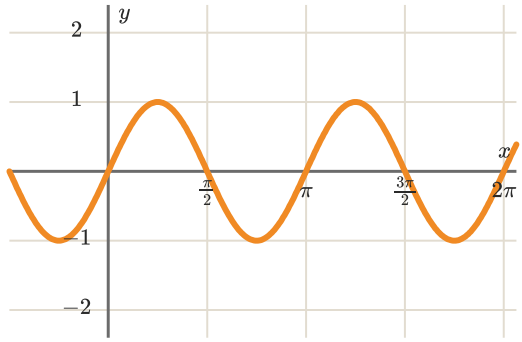
a $y = 2\cos x$

b $y = \sin 2x$

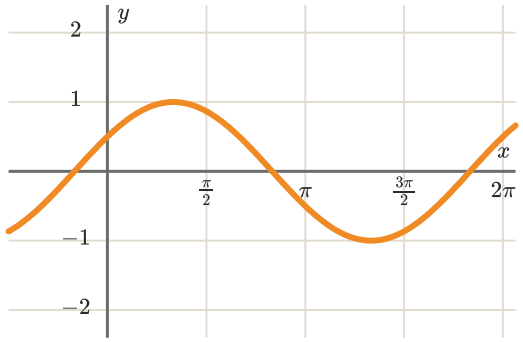
c $y = 1 + \sin x$

d $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

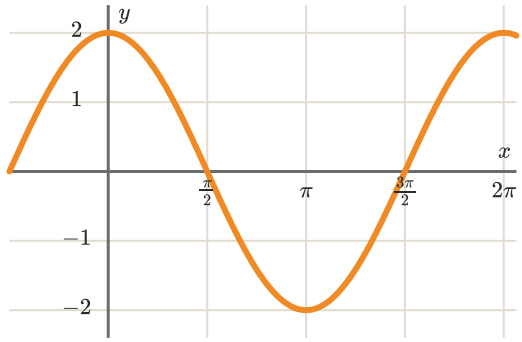
A



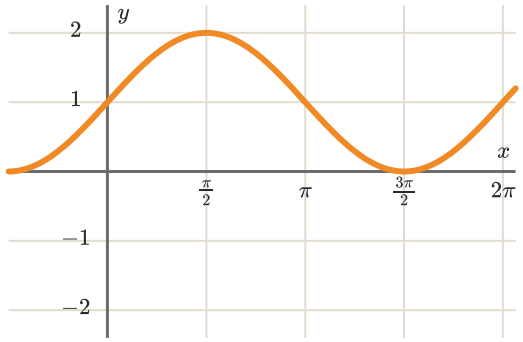
B



C



D



a → _____ **b** → _____ **c** → _____ **d** → _____

VERO O FALSO

15 Stabilisci se ciascuna affermazione è vera o falsa.

a	$\tan\frac{x}{2}$ è definita per ogni x reale.	V	F
b	Per ogni $x \in [-1, 1]$ vale $\sin(\arcsin x) = x$.	V	F
c	Per ogni x reale vale $\arcsin(\sin x) = x$.	V	F
d	$\cos 105^\circ < 0$.	V	F
e	$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ > 1$.	V	F
f	La funzione $y = \sin x + \cos x$ ha periodo π.	V	F

DIMOSTRAZIONI

16 Dimostra la formula di bisezione $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ e ricava da essa, insieme a $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, la formula $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

17 Dimostra le formule parametriche $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, dove $t=\tan\frac{x}{2}$.

QUESITI DA GARA DI MATEMATICA · CINQUE OPZIONI

18 Il valore di $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$ è:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{3}{2}$

19 Qual è il valore minimo di $\sin^4 x+\cos^4 x$?

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

20 Il valore di $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$ è:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 1 (C) 3 (D) $\sqrt{3}$ (E) 0

Soluzioni

1 C	**2** A	**3** B	**4** D	**5** B	**6** A	**7** C	**8** D	**9** A	**10** C
11 B	**12** D	**13** A	**18** B	**19** C	**20** D	**14** a→C b→A c→D d→B			
15 aF · bV · cF · dV · eV · fF				**16-17** dimostrazioni: vedi svolgimento					

1 **C** $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{2/5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ (con $\frac{\alpha}{2}$ acuto).

2 **A** $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, quindi $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{12/13}{18/13}=\frac{2}{3}$.

3 **B** $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

4 **D** Con $t=\tan\frac{x}{2}=2$: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

5 **B** Poiché $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, si ha $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ e il coseno è negativo:
$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{18/25}{2}}=-\frac{3}{5}$.

6 **A** Con $t=\frac{1}{3}$: $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2/3}{8/9}=\frac{3}{4}$.

7 **C** $\sin x-\cos x=A\sin(x+\varphi)$ con $A=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; da $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. Quindi $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

8 **D** $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ e $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, perché l'arcoseno ha valori in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

9 **A** Con $\alpha=\arctan\frac{1}{3}$, $\tan\alpha=\frac{1}{3}$: $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2/3}{10/9}=\frac{3}{5}$.

10 **C** $\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\frac{5}{13},\sin\beta=\frac{12}{13}$. Quindi
$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{15+48}{65}=\frac{63}{65}$.

11 **B** $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$: il massimo è 2 (ampiezza $\sqrt{3+1}$).

12 **D** $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{3\pi}{4}$: $x=0$ o $x=\frac{\pi}{2}$.

13 **A** I periodi sono $\frac{2\pi}{3}$ e 4π; il minimo comune multiplo è 4π (si ha $4\pi=6\cdot\frac{2\pi}{3}$).

14 Si riconoscono dal periodo, dall'intercetta e dal massimo: $y=2\cos x$ (massimo 2, $y(0)=2$); $y=\sin 2x$ (periodo π, $y(0)=0$); $y=1+\sin x$ (valori tra 0 e 2, $y(0)=1$); $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ (massimo in $x=\frac{\pi}{3}$, $y(0)=\frac{1}{2}$).
a→C **b**→A **c**→D **d**→B

15 **FVFVVF** **a** F (non è definita per $x = \pi$). **b** V. **c** F (per $x = \pi$: $\arcsin(\sin \pi) = 0 \neq \pi$). **d** V ($\cos 105° = -\sin 15°$). **e** V (vale circa 1,22). **f** F (il periodo è 2π).

16 Dalla duplicazione, con angolo $\frac{\alpha}{2}$: $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, da cui $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$. Analogamente $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ dà $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$. Allora $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

17 Dalla duplicazione $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$; dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 \frac{x}{2}$ si ottiene $\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$. Analogamente $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

18 **B** Poiché $\cos(x + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$, con $x = 10°$ la somma è $\sin^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{3}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{4}$.

19 **C** $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$. Poiché $\sin^2 2x \leq 1$, il valore minimo è $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

20 **D** Con $a = \tan 20°$ e $b = \tan 40°$: $\tan 60° = \frac{a + b}{1 - ab} = \sqrt{3}$, quindi $a + b = \sqrt{3} - \sqrt{3}ab$ e $a + b + \sqrt{3}ab = \sqrt{3}$.