FORMULARIO · LICEO · MATEMATICA

Logica degli enunciati

Connettivi, tabelle di verità, leggi e quantificatori: tutto quello che serve per ragionare (e dimostrare) senza inciampare.

INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

DEFINIZIONE

Enunciato

Un **enunciato** (o proposizione) è una frase di cui ha senso dire che è **vera** o **falsa**. Lo indichiamo con una lettera: p, q, r. «7 è un numero primo» è un enunciato (vero); «Che ora è?» non lo è. I **connettivi** costruiscono enunciati composti, e il loro valore di verità dipende **solo** da quello dei componenti: lo riassumiamo in una **tabella di verità**, che con n enunciati ha 2^n righe. Convenzione: **V** $= 1$, **F** $= 0$.

I Negazione di un enunciato

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

La negazione corrisponde al «**non**» e **scambia** il valore di verità. Si scrive $\overline{p}$ (oppure $\neg p$).

A livello logico: $\overline{p} = 1 - p$.

II Congiunzione di enunciati

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione corrisponde alla «**e**»: $p \wedge q$ è vera **solo se lo sono entrambi**.

A livello logico si rende con una **moltiplicazione**: $p \wedge q = p \cdot q$.

III Disgiunzione inclusiva

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione corrisponde alla «**o**» (nel senso di «e/o»): $p \vee q$ è falsa **solo se lo sono entrambi**.

A livello logico si rende con una **somma**, con la regola $1 + 1 = 1$: $p \vee q = \max(p, q)$.

IV Disgiunzione esclusiva

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Corrisponde alla «**o… o…**» (aut): $p \veebar q$ è vera quando **uno solo** dei due è vero.

È la negazione della coimplicazione: $p \veebar q \equiv \overline{p \leftrightarrow q}$.

Osserva: «Studia o gioca» è inclusiva, «O studia o gioca» è esclusiva.

V Inferenza di enunciati (implicazione)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'implicazione corrisponde al «**se… allora…**». In $p \rightarrow q$, p è l'**antecedente** e q il **conseguente**.

È falsa in **un solo caso**: da un antecedente vero si arriva a un conseguente falso. Da un antecedente falso, invece, $p \rightarrow q$ è sempre vera.

LINGUAGGIO

Condizione sufficiente e necessaria

Se $p \rightarrow q$ è vera, diciamo che p è **condizione sufficiente** per q e che q è **condizione necessaria** per p. Esempio: «se un numero è multiplo di 4, allora è pari». Essere multiplo di 4 basta per essere pari; essere pari serve, ma non basta.

VI Coimplicazione

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La coimplicazione corrisponde al «**se e solo se…**»: $p \leftrightarrow q$ è vera quando i due enunciati hanno **lo stesso valore di verità**.

Equivale a una doppia implicazione:
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

LINGUAGGIO COMUNE

IN ITALIANO	SI SCRIVE	ATTENZIONE
«p e q», «p ma q», «p anche se q»	$p \wedge q$	«ma» e «anche se» in logica valgono come «e».
«né p né q»	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	Equivale a $\overline{p \vee q}$.
«p solo se q»	$p \rightarrow q$	La condizione sta dopo «solo se».
«p se q»	$q \rightarrow p$	Qui l'implicazione si legge al contrario.

RIEPILOGO

Tutti i connettivi in una tabella

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

CLASSIFICAZIONE

Tautologie, contraddizioni, contingenze

Tautologia

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	V
F	V	V

Sempre **vera**, qualunque valore abbiano gli enunciati. Esempio: $p \vee \overline{p}$.

Contraddizione

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
V	F	F
F	V	F

Sempre **falsa**. Esempio: $p \wedge \overline{p}$.

Contingenza

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A volte vera, a volte falsa. Esempio: $p \wedge q$.

METODO

Tabella con tre enunciati

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Con tre enunciati le righe sono $2^3 = 8$. Procedi così:

1. elenca tutte le combinazioni di V e F per p, q, r (la prima colonna cambia più lentamente);

2. calcola le colonne intermedie (qui $p \wedge q$);

3. calcola la colonna finale.

Qui $(p \wedge q) \to r$ è falsa **solo** nella riga in cui p, q sono veri e r è falso.

LEGGI

Equivalenze notevoli

Due enunciati sono **equivalenti** ($\equiv$) se hanno la stessa tabella di verità. Possiamo sostituire l'uno con l'altro senza cambiare il senso del discorso.

Doppia negazione	$\overline{\overline{p}} \equiv p$
Idempotenza	$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$
Commutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Distributiva	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Assorbimento	$p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Terzo escluso	$p \vee \overline{p}$ è sempre vera
Non contraddizione	$p \wedge \overline{p}$ è sempre falsa

FORMULA · LEGGI DI DE MORGAN

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Regola

Per negare, **cambia il connettivo** (e in o, o in e) e **nega i componenti**.

Verifica

Qui sotto la tabella di $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$: le colonne evidenziate coincidono.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

FORMULA · ORDINE DI PRECEDENZA

$$\neg \succ \wedge \succ \vee \succ \rightarrow \succ \leftrightarrow$$

$\overline{p}$
si applica per prima

$\wedge$
prima di $\vee$

$\rightarrow$, $\leftrightarrow$
per ultime. Nel dubbio, usa le parentesi.

LEGGI

Implicazione: forme equivalenti e varianti

Come disgiunzione	$p \to q \equiv \overline{p} \vee q$
Negazione	$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$
Contronominale	$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$
Coimplicazione	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
Esclusiva	$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
Esportazione	$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

LE QUATTRO FORME

Diretta, inversa, contraria, contronominale

FORMA	SIMBOLO	ESEMPIO	VALORE
Diretta	$p \to q$	Se n è multiplo di 4, allora n è pari	V
Inversa	$q \to p$	Se n è pari, allora n è multiplo di 4	F
Contraria	$\overline{p} \to \overline{q}$	Se n non è multiplo di 4, allora n non è pari	F
Contronominale	$\overline{q} \to \overline{p}$	Se n non è pari, allora n non è multiplo di 4	V

La diretta e la contronominale sono **equivalenti**; lo sono anche l'inversa e la contraria. Ma la diretta **non** equivale all'inversa: con $n = 6$ (pari, non multiplo di 4) la diretta resta vera e l'inversa è falsa.

ERRORE COMUNE

Confondere l'implicazione con la sua inversa

SBAGLIATO Se è vera «se p, allora q», allora è vera anche «se q, allora p».

CORRETTO «Se p, allora q» equivale a «se non q, allora non p».

Per dimostrare una implicazione puoi sempre dimostrare la sua contronominale: a volte è molto più semplice.

ERRORE COMUNE

Negare una implicazione con un'altra implicazione

SBAGLIATO $\overline{p \to q} \equiv p \to \overline{q}$

CORRETTO $\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$

Esempio: la negazione di «se studio, allora passo l'esame» è «studio **e** non passo l'esame».

QUANTIFICATORI

Per ogni, esiste

QUANTIFICATORE UNIVERSALE

$\forall$

«**per ogni**», «tutti». $\forall x\ P(x)$ è vera se $P(x)$ è vera **per tutti** gli x.

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

$\exists$

«**esiste almeno un**». $\exists x\ P(x)$ è vera se **almeno un** x rende vera $P(x)$. Con $\exists!$ si intende «esiste uno e uno solo».

FORMULA · NEGAZIONE DEI QUANTIFICATORI

$$\overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)} \qquad \overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)}$$

Regola

Per negare, scambia $\forall$ con $\exists$ e **nega la proprietà**.

Esempio

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ è falsa; la sua negazione $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$ è vera (basta $x = 0$).

! ERRORE COMUNE

Negare «tutti» con «nessuno»

SBAGLIATO La negazione di «tutti gli studenti hanno superato il test» è «nessuno studente ha superato il test».

CORRETTO La negazione è «**almeno uno** studente non ha superato il test».

Basta un controesempio per negare un $\forall$.

! ERRORE COMUNE

Negare una congiunzione mantenendo la «e»

SBAGLIATO «Non (piove e fa freddo)» significa «non piove e non fa freddo».

CORRETTO «Non (piove e fa freddo)» significa «non piove **oppure** non fa freddo».

È la prima legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$.

ALLENATI

Esercizi

ESERCIZIO 1 ★☆☆

Tabella di verità

Costruisci la tabella di $\overline{p} \vee q$ e confrontala con quella di $p \to q$.

SOLUZIONE

ESERCIZIO 2 ★★☆

Negare una implicazione

Scrivi la negazione di «se studio, allora passo l'esame».

SOLUZIONE

ESERCIZIO 3 ★★★

Tautologia o no?

Stabilisci se $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$ è una tautologia.

SOLUZIONE

SOLUZIONI

Controlla il tuo lavoro

ESERCIZIO 1

Nelle righe VV, VF, FV, FF (in quest'ordine) $\overline{p} \vee q$ vale **V, F, V, V**, come $p \to q$: le due colonne coincidono, quindi $\overline{p} \vee q \equiv p \to q$.

ESERCIZIO 2

Dato che $\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$, la negazione è «**studio e non passo l'esame**».

ESERCIZIO 3

La colonna finale è **V, V, V, V**: è una **tautologia**. Per questo possiamo dimostrare una implicazione passando dalla sua contronominale.