INFOMAAT CENTRO RIPETIZIONI SINCE 2011

USO DOCENTE · VERIFICHE A E B

Soluzioni · Limiti e asintoti

Versione A

SOLUZIONI SINTETICHE

ESERCIZIO 1 · 20 punti

a) Base: $\frac{1}{3} - \frac{1}{f} \to \frac{1}{3}$; esponente: $\frac{1}{g} \to +\infty$. Non è una forma indeterminata: $\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}$. **0**

b) Numeratore $\to 3$; denominatore $1 + f \to -\infty$. Costante su infinito. **0^-**

c) $2^g \to 1$, quindi $f \cdot 2^g \to -\infty$; $\arctan g \to 0^+$. Si ha $\dfrac{-\infty}{0^+}$. **$-\infty$**

ESERCIZIO 2 · 40 punti

a) Forma $\frac{0}{0}$. $\tan 3x - \sin 3x = \tan 3x\,(1 - \cos 3x)$ e $\dfrac{\tan 3x\,(1-\cos 3x)}{x^3} \to 3 \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{27}{2}$ (limiti notevoli). Il limite è il reciproco. **$\frac{2}{27}$**

b) Forma $\frac{0}{0}$. Razionalizzando: $\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} \to \dfrac{2}{2\sqrt{3}}$. **$\frac{\sqrt{3}}{3}$**

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Termini di grado massimo: $\dfrac{-x^3}{5x^2} = -\dfrac{x}{5}$, con $x \to -\infty$. **$+\infty$**

d) Forma $\infty - \infty$. $\sqrt{9x^2+x} - 3x = \dfrac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x} = \dfrac{1}{\sqrt{9+1/x}+3} \to \dfrac{1}{6}$; poi si sottrae 1. **$-\frac{5}{6}$**

e) Forma $\frac{0}{0}$. Numeratore $= (x-2)(x-3)^2$, denominatore $= (x-2)(x+1)$. Resta $\dfrac{(x-3)^2}{x+1}$. **$\frac{1}{3}$**

f) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. $\dfrac{\log 4 + 3\log x}{\log 10 + \log x} = \dfrac{3 + \log 4/\log x}{1 + \log 10/\log x}$. **3**

ESERCIZIO 3 · 15 punti

Fissato $M > 0$, si cerca $N > 0$ tale che $x < -N \Rightarrow 1 - e^{-x} < -M$.
$1 - e^{-x} < -M \iff e^{-x} > M + 1 \iff -x > \ln(M+1) \iff x < -\ln(M+1)$. Poiché $M > 0$, $\ln(M+1) > 0$: basta scegliere $N = \ln(M+1)$. La proposizione è vera.

ESERCIZIO 4 · 15 punti

Dominio. $x^2 - 4 > 0$ (radicale a denominatore, quindi $\neq 0$): $x < -2 \ \vee \ x > 2$, cioè $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Verticali. $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -2^-} y = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$: asintoti $x = 2$ e $x = -2$.

Orizzontali. Per $x \to +\infty$: $\dfrac{3 + 1/x}{\sqrt{1 - 4/x^2}} \to 3$. Per $x \to -\infty$ si ha $\sqrt{x^2} = -x$ e il limite vale -3: asintoti $y = 3$ (a destra) e $y = -3$ (a sinistra). Non ci sono asintoti obliqui.

Versione B

SOLUZIONI SINTETICHE

ESERCIZIO 1 · 20 punti

a) Base: $\frac{1}{g}+\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$; esponente: $\frac{1}{f}\to-\infty$. Non è una forma indeterminata: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}$. $+\infty$

b) Numeratore $1-g\to-\infty$; denominatore $f-3\to-3$. $\dfrac{-\infty}{-3}$. $+\infty$

c) $3-g\to-\infty$, $e^f\to1$, $\sin f\to0^-$. Si ha $\dfrac{-\infty}{0^-}$. $+\infty$

ESERCIZIO 2 · 40 punti

a) Forma $\frac{0}{0}$. $\tan 2x-\sin 2x=\tan 2x\,(1-\cos 2x)$; $\dfrac{\tan 2x}{x}\to2$ e $\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\to2$. 4

b) Forma $\frac{0}{0}$. Razionalizzando: $\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+8}+2\sqrt{2}}\to\dfrac{6}{4\sqrt{2}}$. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividendo per x^3: $\dfrac{6-1/x}{2/x^3-3/x^2-2}\to\dfrac{6}{-2}$. -3

d) Forma $\infty-\infty$. $\dfrac{(x+3)^2-(x^2+4x+1)}{x+3+\sqrt{x^2+4x+1}}=\dfrac{2x+8}{x+3+\sqrt{x^2+4x+1}}\to\dfrac{2}{2}$. 1

e) Forma $\frac{0}{0}$. Numeratore $=(x+1)(x-2)^2$, denominatore $=(x+1)(x+2)$. Resta $\dfrac{(x-2)^2}{x+2}$ in $x=-1$. 9

f) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. $\dfrac{\log 2+\log x}{4\log x+\log(1+x^{-4})}$, con $\log(1+x^{-4})\to0$. $\dfrac{1}{4}$

ESERCIZIO 3 · 15 punti

Fissato $M>0$, si cerca $\delta>0$ tale che $0<|x+1|<\delta\Rightarrow\dfrac{3}{(x+1)^2}>M$. Per $x\neq-1$:

$\dfrac{3}{(x+1)^2}>M\iff(x+1)^2<\dfrac{3}{M}\iff|x+1|<\sqrt{\dfrac{3}{M}}$. Basta scegliere $\delta=\sqrt{3/M}$. La proposizione è vera.

ESERCIZIO 4 · 15 punti

Dominio. $4x^2-x\geq0\iff x(4x-1)\geq0\iff x\leq0\ \vee\ x\geq\frac{1}{4}$, ed $x\neq1$:
$(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$.

Verticale. In $x=1$ il numeratore vale $\sqrt{3}>0$: $\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$. Asintoto $x=1$. Gli estremi 0 e $\frac{1}{4}$ non danno asintoti.

Orizzontali. Per $x\to+\infty$: $\sqrt{4-1/x}\to2$. Per $x\to-\infty$ si ha $\sqrt{x^2}=-x$ e il limite vale -2: asintoti $y=2$ (a destra) e $y=-2$ (a sinistra). Non ci sono asintoti obliqui.