USO DOCENTE · VERIFICHE C E D

Soluzioni · Limiti e asintoti

Versione C

SOLUZIONI SINTETICHE

ESERCIZIO 1 · 15 punti

a) Base: $2 + \frac{1}{f} \to 2$; esponente $g \to -\infty$. Non è una forma indeterminata: $2^{-\infty}$. → 0^+

b) Numeratore $1 - g \to +\infty$; denominatore $3 + \frac{1}{f} \to 3$. Si ha $\frac{+\infty}{3}$. → $+\infty$

c) $\arctan g \to -\frac{\pi}{2}$ (limitato), $f \to +\infty$. Si ha $\frac{-\pi/2}{+\infty}$. → 0^-

ESERCIZIO 2 · 36 punti

a) Forma $\frac{0}{0}$. $\frac{\sin 4x}{4x} \to 1$, $\frac{\tan 2x}{2x} \to 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$: $\frac{4x \cdot 2x}{x^2/2}$. → 16

b) Forma $\frac{0}{0}$. Razionalizzando: $\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} \to \frac{1}{6 \cdot 6}$. → $\frac{1}{36}$

c) Forma $\frac{\infty-\infty}{\infty}$. Con $x<0$: $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+1/x^2}$. Raccogliendo x: $\frac{3-\sqrt{1+1/x^2}}{2-1/x} \to \frac{2}{2}$. → 1

d) Forma $\infty - \infty$. $\frac{4x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{4}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-1/x}} \to \frac{4}{2}$. → 2

e) Forma $\frac{0}{0}$. Numeratore $= (x+2)(x-1)(x+1)$, denominatore $= (x+1)(x+3)$. Resta $\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}$. → -1

f) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. $\frac{2\log x + \log(1+x^{-2})}{\log 5 + \log x}$, con $\log(1+x^{-2}) \to 0$. → 2

ESERCIZIO 3 · 15 punti

Fissato $M > 0$, si cerca $N > 0$ tale che $x > N \Rightarrow 3 - \sqrt{x} < -M$.
$3 - \sqrt{x} < -M \iff \sqrt{x} > M + 3 \iff x > (M+3)^2$. Basta scegliere $N = (M+3)^2$. La proposizione è vera.

ESERCIZIO 4 · 16 punti · 2 per risposta

a) 2 b) 2 c) $+\infty$ d) $-\infty$

e) $-\infty$ f) $+\infty$ g) 0

h) $x=-2, x=2, y=2$

ESERCIZIO 5 · 18 punti

Dominio. $x^2-1\geq 0$: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Verticali. Nessuno: la funzione è continua nel dominio e agli estremi ± 1 assume valori finiti.

A $+\infty$. $m=\lim\dfrac{y}{x}=\lim\left(1+\sqrt{1-1/x^2}\right)=2$; $q=\lim\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$: asintoto obliquo $y=2x$.

A $-\infty$. $y=\dfrac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\to 0^-$: asintoto orizzontale $y=0$ (a sinistra).

Versione D

SOLUZIONI SINTETICHE

ESERCIZIO 1 · 15 punti

a) $f+1\to 3$; $f-2\to 0^-$. Si ha $\dfrac{3}{0^-}$. → $-\infty$

b) Vicino a x_0 è $g<0$, quindi $-g\to 0^+$ e l'argomento del logaritmo tende a 0^+. → $-\infty$

c) $\frac{1}{g}\to-\infty$, quindi $e^{1/g}\to 0^+$; $f\to 2$. Si ha $2\cdot 0^+$. → 0^+

ESERCIZIO 2 · 36 punti

a) Forma $\frac{0}{0}$. $\sin x-\tan x=-\tan x\,(1-\cos x)$; resta $-\dfrac{\tan x}{x}\to -1$. → -1

b) Forma $\frac{0}{0}$. Razionalizzando: $\dfrac{3\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\sqrt{3x-2}+2}\to\dfrac{3\cdot 6}{4}$. → $\dfrac{9}{2}$

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividendo per e^x: $\dfrac{3+x^5/e^x}{1-2x/e^x}$; l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a ogni potenza. → 3

d) Forma $\infty-\infty$. Con $x<0$: $\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\dfrac{1}{-\sqrt{4+1/x}-2}\to\dfrac{1}{-4}$. → $-\dfrac{1}{4}$

e) Forma $\frac{0}{0}$. Numeratore $=x(x-3)^2$, denominatore $=(x-3)(x^2+3x+9)$. Resta $\dfrac{x(x-3)}{x^2+3x+9}$. → 0

f) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. $\ln\left(e^{2x}+x\right)=2x+\ln\left(1+xe^{-2x}\right)$, con $xe^{-2x}\to 0$. → $\dfrac{2}{3}$

ESERCIZIO 3 · 15 punti

Fissato $\varepsilon>0$, si cerca $N>0$ tale che $x>N\Rightarrow\left|\dfrac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon$. Per $x>0$:
$\left|\dfrac{2x-1}{x}-2\right|=\dfrac{1}{x}<\varepsilon\iff x>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Basta scegliere $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$. La proposizione è vera.

Versione D · continua

SOLUZIONI SINTETICHE

ESERCIZIO 4 · 16 punti · 2 per risposta

a) 1 b) -1 c) $-\infty$ d) $+\infty$

e) 2 f) 3 g) non esiste: $2 \neq 3$

h) $x = -1$, $y = 1$ (a sinistra), $y = -1$ (a destra)

ESERCIZIO 5 · 18 punti

Dominio. $x^2 - 2x \geq 0$: $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

Verticali. Nessuno: la funzione è continua nel dominio e agli estremi 0 e 2 assume valori finiti.

A $+\infty$. $y = \dfrac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - 2/x}} \to 1$: asintoto orizzontale $y = 1$ (a destra).

A $-\infty$. Con $x < 0$: $\sqrt{x^2 - 2x} = -x\sqrt{1 - 2/x}$, quindi $m = \lim \dfrac{y}{x} = 1 + \sqrt{1 - 2/x} = 2$;

$q = \lim \left(-x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) = \lim(-x)\left(1 - \sqrt{1 - 2/x}\right) = \lim \dfrac{-2}{1 + \sqrt{1 - 2/x}} = -1$: asintoto obliquo $y = 2x - 1$ (a sinistra).