Problema 1 · Svolgimento

La bilancia di Watt determina una massa in due fasi: nella **fase statica** una forza elettromagnetica equilibra il peso; nella **fase dinamica** si misura una forza elettromotrice indotta per tarare il fattore geometrico $B\,L$, che così non serve conoscere direttamente.

a Fase di pesatura statica

Ogni tratto del filo (lunghezza totale L) è immerso nel campo radiale B, ad esso perpendicolare; la forza su un conduttore percorso da corrente vale dunque $F = B\,I\,L$. All'equilibrio della bilancia a bracci uguali questa forza equilibra il peso $P = m\,g$ dell'oggetto:

$$B\,I\,L = m\,g$$

da cui ricaviamo la massa:

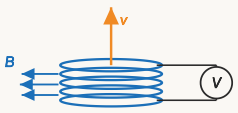
RISULTATO

$$m = \frac{B\,I\,L}{g}$$

Il prodotto $B\,L$ è il **fattore geometrico** del sistema bobina–magnete: dipende dalla forma dell'avvolgimento e dalla geometria del campo, ed è proprio la quantità che non si riesce a misurare con la precisione richiesta. È il problema che la fase dinamica risolve.

b Fase dinamica e formula della massa

Si interrompe la corrente e si fa traslare l'avvolgimento a velocità costante v nello stesso campo B. Per la legge dell'induzione, ai capi della bobina compare una forza elettromotrice:



Fase dinamica: bobina in moto e f.e.m. indotta V.

$$V = B\,L\,v$$

Compare di nuovo lo stesso fattore BL. Dalla fase statica $BL = \dfrac{mg}{I}$; sostituendo:

$$V = \frac{mg}{I}v \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{VI}{gv}$$

RISULTATO

$$m = \frac{VI}{gv}$$

Il fattore BL è sparito: la massa dipende solo da due grandezze elettriche (V, I), dalla velocità v e da g, tutte misurabili con altissima precisione.

! ERRORE COMUNE

Le due fasi non avvengono insieme

Un errore frequente è pensare che nella fase dinamica scorra ancora la corrente I. Non è così: nella fase statica si impone I e si misura una forza; nella fase dinamica non si impone alcuna corrente, si muove la bobina e si misura la f.e.m. a vuoto V. Le due fasi sono collegate soltanto dal fattore comune BL.

c Verifica numerica e sensibilità

Sostituiamo i dati nella formula del punto **b**:

CALCOLO DELLA MASSA

```
m = V·I / (g·v)
  = (1,80 V × 0,0109 A) / (9,81 m/s² × 0,0020 m/s)
  = 0,019620 / 0,019620
  = 1,0000 kg
```

La massa coincide con il campione da $1\ \text{kg}$, come atteso.

Sensibilità. Con V, I, g fissi si ha $m \propto \dfrac{1}{v}$, quindi in valore relativo $\left|\dfrac{\Delta m}{m}\right| = \left|\dfrac{\Delta v}{v}\right|$. Per un errore di $1\ \mu\text{g}$ su $1\ \text{kg}$, cioè $\Delta m/m = 10^{-9}$:

TOLLERANZA SULLA VELOCITÀ

$$\Delta v = 10^{-9} \cdot v = 10^{-9} \times 2{,}0\times10^{-3}\ \text{m/s} = 2{,}0\times10^{-12}\ \text{m/s}$$

Bisognerebbe controllare la velocità a circa 2 picometri al secondo: è il motivo per cui v si misura per via interferometrica (laser) e per cui una bilancia di Watt esiste solo in pochi laboratori di metrologia al mondo.

d Bilancio di potenza e legame con la costante di Planck

Riscrivendo $m = \dfrac{V\,I}{g\,v}$ nella forma $V\,I = m\,g\,v$, leggiamo un'uguaglianza di potenze: a sinistra la **potenza elettrica** $V\,I$, a destra la **potenza meccanica** $m\,g\,v$ (peso per velocità). Da qui il nome «bilancia di Watt».

> POTENZA
>
> `P = V·I = 1,80 V × 0,0109 A = 1,962×10⁻² W ≈ 19,6 mW  (= m·g·v)`

Le due potenze provengono da fasi diverse, ma coincidono perché condividono il fattore $B\,L$ (bilancio di potenza «virtuale»).

Legame con h. La tensione si realizza con l'effetto Josephson, $V = \dfrac{n\,f\,h}{2e}$ (dunque $V \propto h$); la corrente come $I = U/R$, con la resistenza R data dall'effetto Hall quantistico, $R = \dfrac{h}{i\,e^2}$. Combinando, la carica elementare e si semplifica:

$$V\,I = \frac{n\,n'\,i}{4}\,f\,f'\,h \;\propto\; h \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{V\,I}{g\,v} \propto h$$

Poiché la costante di Planck h è oggi fissata a un valore esatto, misurare $\dfrac{V\,I}{g\,v}$ equivale a **realizzare il chilogrammo a partire da h**: è esattamente lo scopo della nuova definizione.