



INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011

UNIVERSITÀ · STATISTICA E PROBABILITÀ

Distribuzione normale e binomiale

Esercitazione svolta — 7 problemi su distribuzione normale e approssimazione della binomiale, con curve, istogrammi e soluzioni passo passo.

7 problemi · curve e istogrammi · soluzioni complete

Sette problemi di distribuzioni di probabilità

Ogni problema riporta la consegna riformulata in italiano e una soluzione completa. Per ciascuno una curva normale (con l'area sottesa) o un istogramma rende visibile il calcolo.

1	Peso dei neonati	NORMALE
2	Livello terapeutico del litio	NORMALE
3	Nascite femminili in una regione	BINOM. → NORMALE
4	Pressione arteriosa sistolica	NORMALE
5	Studenti che arrivano alla laurea	BINOMIALE
6	Sopravvivenza a 5 anni	BINOM. → NORMALE
7	Sindrome da astinenza neonatale	BINOM. → NORMALE

PROMEMORIA DI METODO

Normale. Si standardizza con $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ e si legge $\Phi(z)$ sulla tavola della normale standard, usando $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Binomiale. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, con media $\mu = np$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$.

Approssimazione. Per n grande la binomiale si approssima con la normale $N(\mu, \sigma)$. Seguiamo la convenzione del corso (senza correzione di continuità) e riportiamo il valore esatto come controllo dove serve.

ESERCIZIO 1 ★☆☆

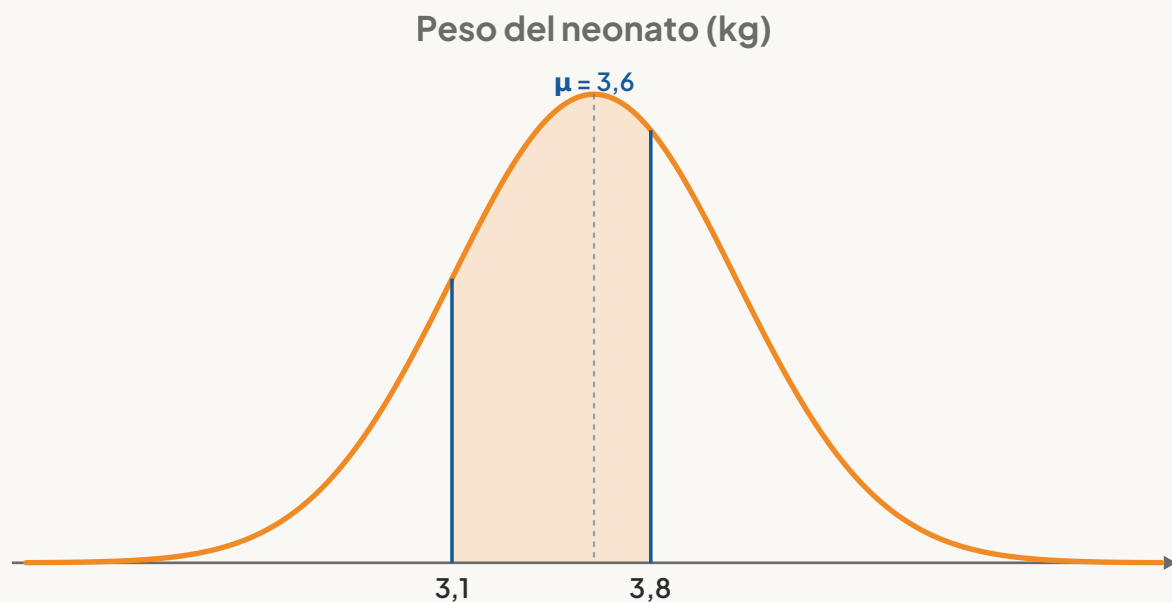
Peso dei neonati

Il peso dei neonati in un reparto di maternità segue una distribuzione normale di media $\mu = 3,6$ kg e deviazione standard $\sigma = 0,5$ kg.

Calcola: **a)** la probabilità che un neonato pesi meno di 3 kg; **b)** la probabilità che pesi fra 3,1 kg e 3,8 kg; **c)** la percentuale di neonati con peso superiore a 4,5 kg.

SOLUZIONE

Standardizziamo con $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ e leggiamo la funzione di ripartizione $\Phi(z)$ della normale standard.



Regione ombreggiata: punto (b). Per gli altri punti cambia solo l'intervallo, non la curva.

a) $z = \frac{3 - 3.6}{0.5} = -1.20 \Rightarrow P(X < 3) = \Phi(-1.20) = 0.1151$, cioè l'**11,51%**.

b) Gli estremi diventano $z_1 = \frac{3.1 - 3.6}{0.5} = -1.00$ e $z_2 = \frac{3.8 - 3.6}{0.5} = 0.40$:

$$P(3.1 < X < 3.8) = \Phi(0.40) - \Phi(-1.00) = 0.6554 - 0.1587 = 0.4967$$

ossia il **49,67%**.

c) $z = \frac{4.5 - 3.6}{0.5} = 1.80 \Rightarrow P(X > 4.5) = 1 - \Phi(1.80) = 1 - 0.9641 = 0.0359$, cioè il **3,59%**.

RISULTATO

- a) $P(X < 3) \approx 11,51\%$
b) $P(3,1 < X < 3,8) \approx 49,67\%$
c) $P(X > 4,5) \approx 3,59\%$

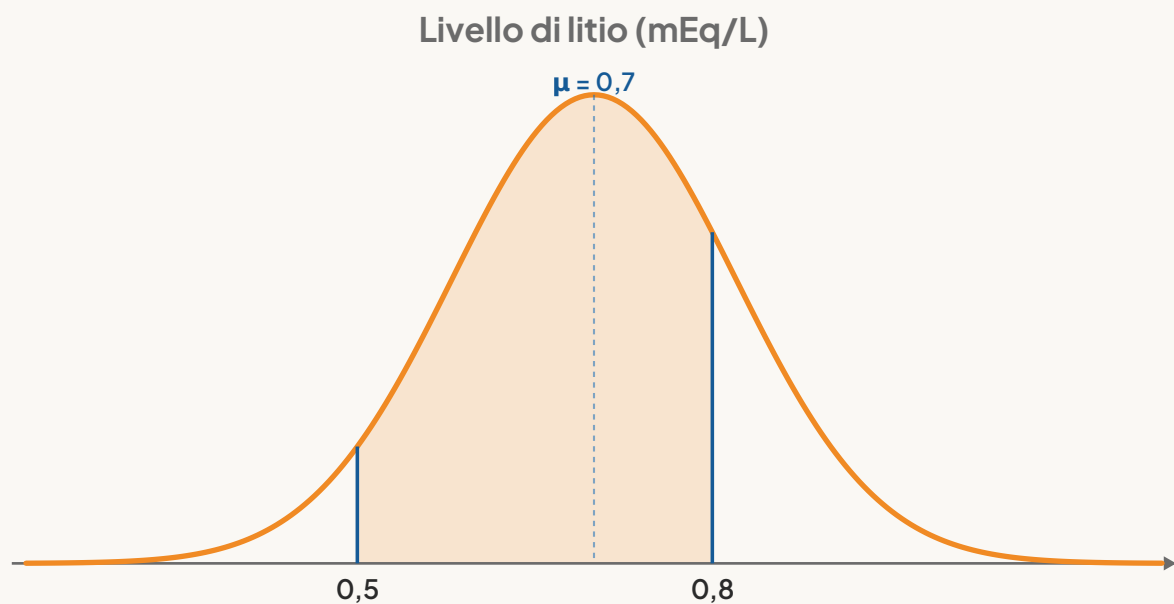
ESERCIZIO 2 ★☆☆

Livello terapeutico del litio

Il livello terapeutico del litio nel sangue segue una distribuzione normale di media $\mu = 0,70$ mEq/L e deviazione standard $\sigma = 0,12$ mEq/L.

Calcola la probabilità che una persona scelta a caso abbia un livello di litio: **a)** fra 0,5 e 0,8 mEq/L; **b)** superiore a 0,9 mEq/L; **c)** minore o uguale a 0,45 mEq/L.

SOLUZIONE



Regione ombreggiata: punto (a).

$$\text{a) } z_1 = \frac{0,5 - 0,70}{0,12} = -1,67 \text{ e } z_2 = \frac{0,8 - 0,70}{0,12} = 0,83:$$

$$P(0,5 < X < 0,8) = \Phi(0,83) - \Phi(-1,67) = 0,7967 - 0,0475 = 0,7492$$

circa il **75%**.

b) $z = \frac{0.9 - 0.70}{0.12} = 1.67 \Rightarrow P(X > 0.9) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$, cioè il **4,75%**.

c) $z = \frac{0.45 - 0.70}{0.12} = -2.08 \Rightarrow P(X \leq 0.45) = \Phi(-2.08) = 0.0188$, cioè l'**1,88%**.

RISULTATO

a) $P(0,5 < X < 0,8) \approx 74,9\% (\approx 75\%)$

b) $P(X > 0,9) \approx 4,75\%$

c) $P(X \leq 0,45) \approx 1,88\%$

ESERCIZIO 3 ★★☆☆

Nascite femminili in una regione

In un certo Paese la probabilità che un nato sia femmina è del **58%**. In una regione si registrano **1000 nascite** in un anno.

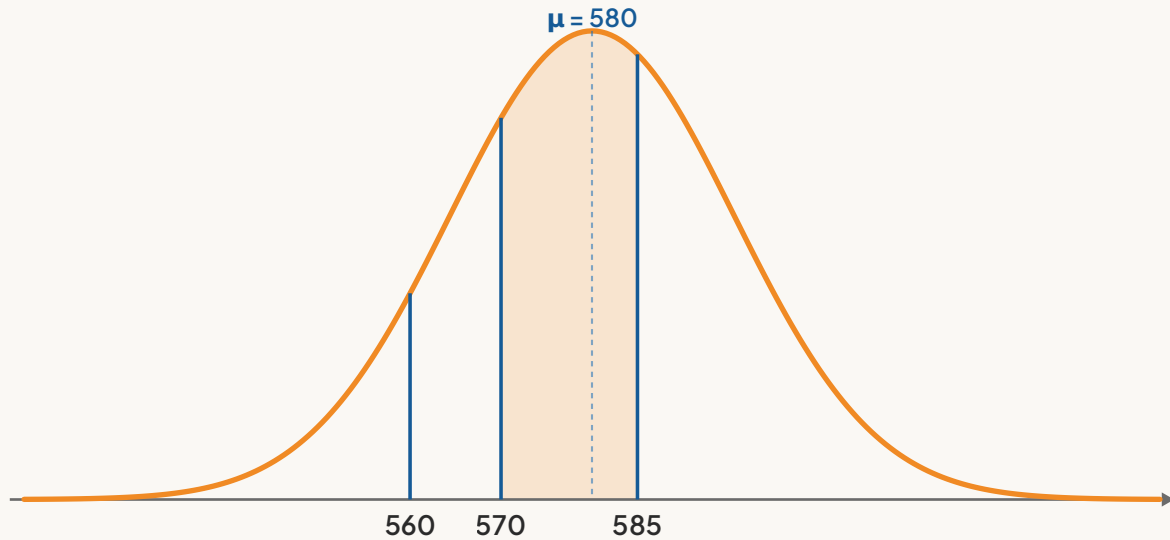
Calcola la probabilità che il numero di femmine nate sia: **a)** minore o uguale a 560; **b)** compreso fra 570 e 585.

SOLUZIONE

Il numero di femmine X è binomiale con $n = 1000$ e $p = 0.58$. Con n grande approssimiamo con una normale di media $\mu = np$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{npq}$:

$$\mu = 1000 \cdot 0.58 = 580, \quad \sigma = \sqrt{1000 \cdot 0.58 \cdot 0.42} = \sqrt{243.6} \approx 15.61$$

Numero di femmine su 1000



Normale che approssima la binomiale. Regione ombreggiata: punto (b).

$$\text{a) } z = \frac{560 - 580}{15.61} = -1.28 \Rightarrow P(X \leq 560) \approx \Phi(-1.28) = 0.1003, \text{ circa il } \mathbf{10\%}.$$

$$\text{b) } z_1 = \frac{570 - 580}{15.61} = -0.64 \text{ e } z_2 = \frac{585 - 580}{15.61} = 0.32:$$

$$P(570 \leq X \leq 585) \approx \Phi(0.32) - \Phi(-0.64) = 0.6255 - 0.2611 = 0.3644$$

cioè il **36,44%**.

Qui seguiamo la convenzione del corso, senza correzione di continuità. Aggiungendo la correzione $\pm 0,5$ sugli interi i valori cambiano di poco.

RISULTATO

$$\text{a) } P(X \leq 560) \approx 10\%$$

$$\text{b) } P(570 \leq X \leq 585) \approx 36,44\%$$

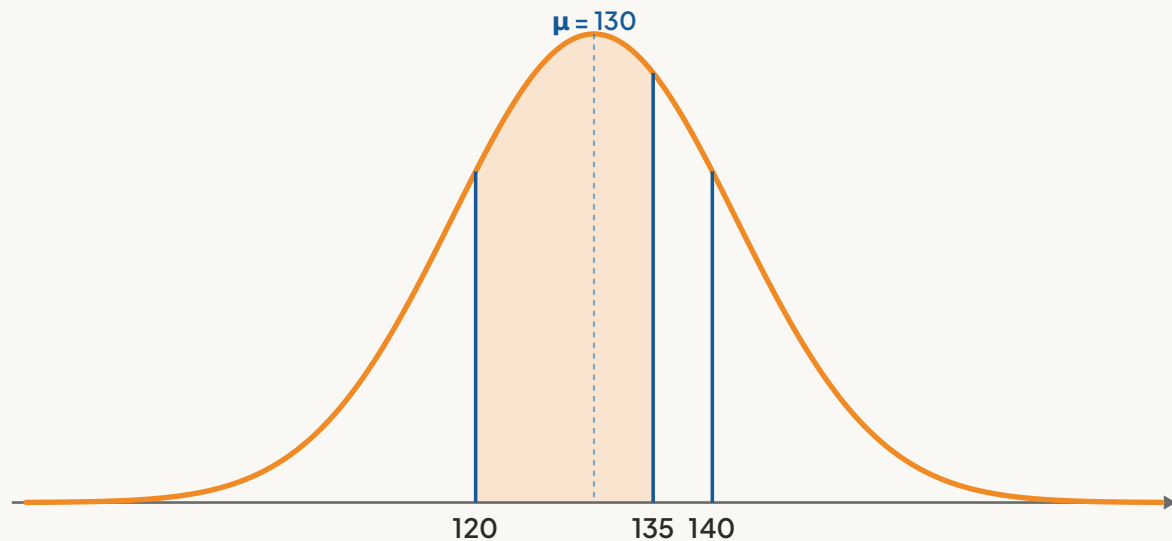
ESERCIZIO 4 ★☆☆

Pressione arteriosa sistolica

La pressione arteriosa sistolica (TAS) di una popolazione segue una distribuzione normale di media $\mu = 130 \text{ mmHg}$ e deviazione standard $\sigma = 12 \text{ mmHg}$.

Calcola la percentuale di persone con TAS: **a)** maggiore o uguale a 140 mmHg; **b)** compresa fra 120 e 135 mmHg; **c)** minore o uguale a 120 mmHg.

Pressione sistolica (mmHg)



Regione ombreggiata: punto (b).

a) $z = \frac{140 - 130}{12} = 0.83 \Rightarrow P(X \geq 140) = 1 - \Phi(0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033$, circa il **20%**.

b) $z_1 = \frac{120 - 130}{12} = -0.83$ e $z_2 = \frac{135 - 130}{12} = 0.42$:

$$P(120 < X < 135) = \Phi(0.42) - \Phi(-0.83) = 0.6628 - 0.2033 = 0.4595$$

cioè circa il **46%**.

c) $z = \frac{120 - 130}{12} = -0.83 \Rightarrow P(X \leq 120) = \Phi(-0.83) = 0.2033$, circa il **20%**.

Osserva: 120 e 140 sono simmetrici rispetto alla media 130, quindi i punti (a) e (c) danno lo stesso valore.

RISULTATO

a) $P(X \geq 140) \approx 20\%$

b) $P(120 < X < 135) \approx 46\%$

c) $P(X \leq 120) \approx 20\%$

ESERCIZIO 5 ★★☆☆

Studenti che arrivano alla laurea

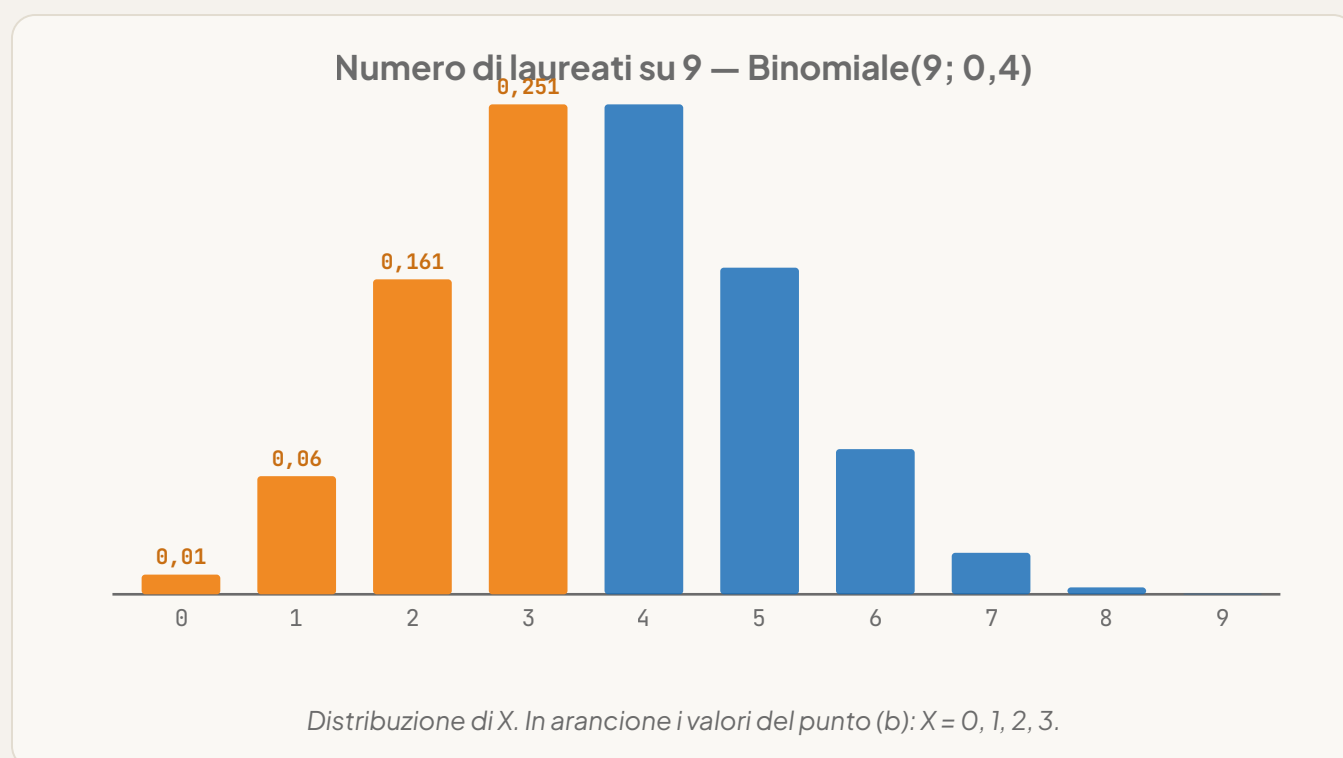
La probabilità che uno studente immatricolato arrivi alla laurea è **0,4**. Si considera un gruppo di **9 studenti**, con esiti indipendenti.

Calcola la probabilità che: **a)** si laureino esattamente 5 studenti; **b)** se ne laureino al più 3; **c)** non se ne laurei nessuno dei 9.

SOLUZIONE

Il numero di laureati X è binomiale con $n = 9$ e $p = 0.4$:

$$P(X = k) = \binom{9}{k} 0.4^k 0.6^{9-k}$$



a) $P(X = 5) = \binom{9}{5} 0.4^5 0.6^4 = 126 \cdot 0.01024 \cdot 0.1296 = 0.1672$.

b) Sommiamo i primi quattro valori:

$$P(X \leq 3) = 0.0101 + 0.0605 + 0.1612 + 0.2508 = 0.4826$$

c) Nessuno si laurea significa $X = 0$:

$$P(X = 0) = 0.6^9 = 0.0101$$

cioè l'**1,01%**.

RISULTATO

- a) $P(X=5) = 0.1672$
b) $P(X \leq 3) \approx 0.4826$
c) $P(X=0) \approx 0.0101$ (1,01%)

ESERCIZIO 6 ★★★

Sopravvivenza a 5 anni

Per una certa malattia la probabilità di sopravvivere a 5 anni dalla diagnosi è del **90%**. Si considera un gruppo di **45 pazienti**.

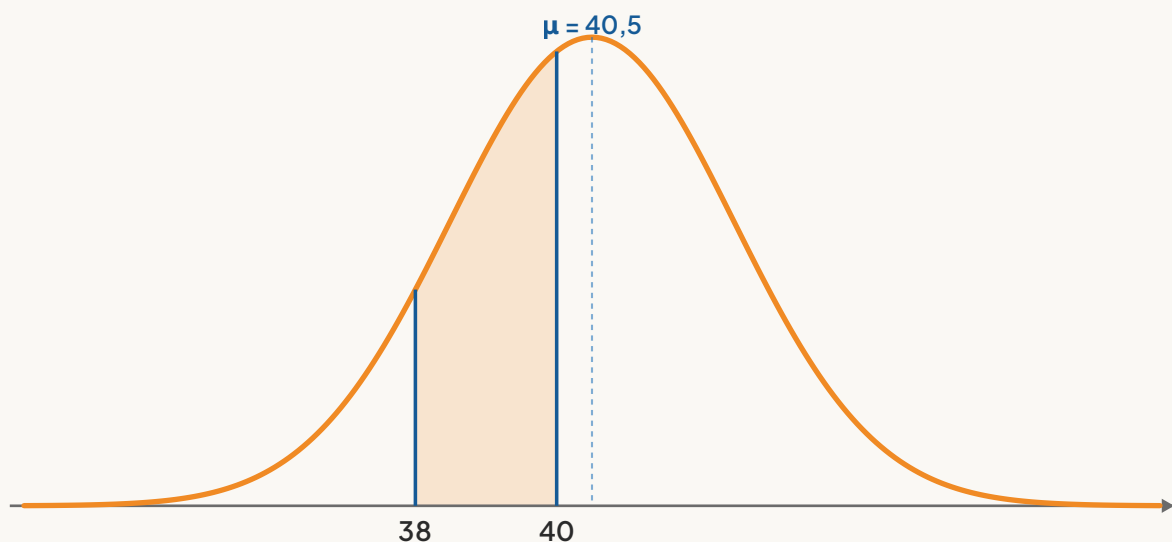
Calcola la probabilità che: **a)** sopravvivano fra 38 e 40 pazienti; **b)** ne sopravvivano almeno 38; **c)** sopravvivano tutti e 45.

SOLUZIONE

X è binomiale con $n = 45$ e $p = 0.9$, quindi:

$$\mu = 45 \cdot 0.9 = 40.5, \quad \sigma = \sqrt{45 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = \sqrt{4.05} \approx 2.01$$

Numero di sopravvissuti su 45



Normale che approssima la binomiale ($\mu = 40.5$). Regione ombreggiata: punto (a).

$$\text{a) } z_1 = \frac{38 - 40.5}{2.01} = -1.24 \text{ e } z_2 = \frac{40 - 40.5}{2.01} = -0.25:$$

$$P(38 \leq X \leq 40) \approx \Phi(-0.25) - \Phi(-1.24) = 0.4013 - 0.1075 = 0.2938$$

circa il **29%**.

b) $z = \frac{38 - 40.5}{2.01} = -1.24$. Poiché 38 sta sotto la media 40,5, la probabilità è alta:

$$P(X \geq 38) \approx 1 - \Phi(-1.24) = 1 - 0.1075 = 0.8925$$

cioè circa l'**89,3%**.

c) «Tutti e 45» è un singolo valore: conviene il calcolo **esatto**, perché sulle code l'approssimazione normale di un punto è inaffidabile.

$$P(X = 45) = 0.9^{45} \approx 0.0087$$

cioè lo **0,87%**.

RISULTATO

- | | |
|---------------------------|------------------|
| a) $P(38 \leq X \leq 40)$ | $\approx 29\%$ |
| b) $P(X \geq 38)$ | $\approx 89,3\%$ |
| c) $P(X=45)$ | $\approx 0,87\%$ |

ESERCIZIO 7 ★★☆☆

Sindrome da astinenza neonatale

Si stima che la probabilità che un neonato da madre con dipendenza presenti una sindrome da astinenza alla nascita sia dell'**80%**. Si considerano **35 neonati**.

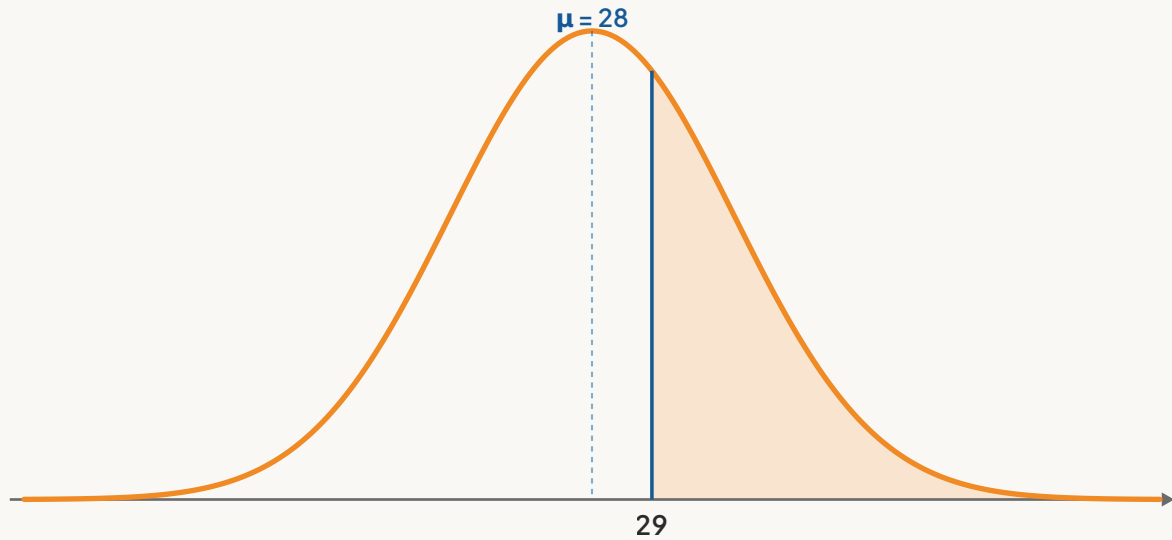
Calcola la probabilità che: **a)** nessuno presenti la sindrome; **b)** la presentino più di 29 neonati.

SOLUZIONE

X è binomiale con $n = 35$ e $p = 0.8$, quindi:

$$\mu = 35 \cdot 0.8 = 28, \quad \sigma = \sqrt{35 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{5.6} \approx 2.37$$

Numero di neonati con sindrome (su 35)



Normale che approssima la binomiale ($\mu = 28$). Regione ombreggiata: punto (b), $X > 29$.

a) «Nessuno» significa $X = 0$. Il calcolo esatto dà

$$P(X = 0) = 0.2^{35} \approx 3.4 \cdot 10^{-25}$$

un valore **praticamente nullo**: l'evento è di fatto impossibile.

b) «Più di 29» significa $X \geq 30$. Con l'approssimazione normale:

$$z = \frac{29 - 28}{2.37} = 0.42 \Rightarrow P(X > 29) \approx 1 - \Phi(0.42) = 1 - 0.6628 = 0.3372, \text{ cioè circa il } \mathbf{33,7\%}.$$

Controllo esatto con la binomiale: $P(X \geq 30) = 0,272$ (27,2%). Con $n = 35$ l'approssimazione normale senza correzione di continuità è solo indicativa; la correzione $\pm 0,5$ avvicina al valore esatto.

RISULTATO

- | | |
|--------------|---------------------------------|
| a) $P(X=0)$ | ≈ 0 (impossibile) |
| b) $P(X>29)$ | $\approx 33,7\%$ (esatto 27,2%) |