



INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011



STATISTICA · UNIVERSITÀ · ESERCIZI SVOLTI

Test del chi-quadro e studi epidemiologici

Nove esercizi svolti sulle variabili qualitative: tabelle di contingenza, test χ^2 di indipendenza, bontà d'adattamento, test di McNemar e identificazione del disegno di studio (coorte, caso-controllo, sperimentale).

Test χ^2

Tabelle di contingenza

Coorte · caso-controllo

INFOMAAT — Centro di ripetizioni

Matematica e fisica · liceo e università · dal 2011

infomaat.it

Il test del chi-quadro

Con variabili **qualitative** si confrontano **frequenze**. Si costruisce la tabella di contingenza, si calcolano le frequenze **attese** sotto H_0 e si misura quanto le osservate se ne discostano.

STATISTICA TEST E FREQUENZE ATTESE

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \quad E_{ij} = \frac{(\text{tot. riga } i) (\text{tot. colonna } j)}{n}$$

Per una tabella 2×2 vale la formula compatta, con $g = 1$ grado di libertà:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

BONTÀ D'ADATTAMENTO

Confronta una distribuzione osservata con una teorica su k classi. $g = k - 1$.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

DATI APPAIATI · MCNEMAR

Stesse unità classificate due volte: contano solo le coppie **discordi** b e c . $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}$$

REGOLA DI DECISIONE ($\alpha = 0,05$)

Si confronta χ^2 con il valore critico: $\chi^2_{0,05; 1} = 3,841$ (tabelle 2×2 e McNemar), $\chi^2_{0,05; 2} = 5,991$ (tre classi). Se $\chi^2 > \chi^2_{\text{tab}}$ si **rifiuta** H_0 : le variabili sono **associate** / c'è divergenza ($p < 0,05$). Le frequenze attese dovrebbero essere ≥ 5 .



Riconoscere il disegno di studio

Prima di applicare il χ^2 conviene capire **come** sono stati raccolti i dati: cambia la misura di associazione che si può calcolare.

1 STUDIO DI COORTE (PROSPETTICO)

Si parte dall'**esposizione** (es. colesterolo alto / basso) e si seguono i gruppi nel tempo per vedere chi sviluppa la malattia. Misura: **rischio relativo** $RR = \frac{a/(a+b)}{c/(c+d)}$.

2 STUDIO CASO-CONTROLLO (RETROSPETTIVO)

Si parte dalla **malattia** (casi vs controlli) e si guarda all'indietro l'esposizione passata. Misura: **odds ratio** $OR = \frac{ad}{bc}$.

3 STUDIO SPERIMENTALE (TRIAL CLINICO)

È il ricercatore ad **assegnare** il trattamento (es. farmaco nuovo vs vecchio) e a confrontare gli esiti.

IN TUTTI I CASI

L'**ipotesi nulla** H_0 è sempre "nessuna associazione tra fattore ed esito" (variabili indipendenti); l'**alternativa** H_1 è "esiste associazione". Il test che decide è lo stesso: il χ^2 sulla tabella di contingenza. Il tipo di studio dice **quale misura di rischio** (RR o OR) è lecito calcolare.

PROBLEMA 1

Vista difettosa e rischio di cadute

CONSEGNA

Si seguono per 5 anni 200 anziani con vista difettosa e 400 con vista normale. Cadono 80 del primo gruppo e 20 del secondo. Verificare con $\alpha = 0,05$ se esiste associazione tra il difetto visivo e le cadute.

FREQUENZE OSSERVATE

	Caduta	No caduta	Tot
Vista difett.	80	120	200
Vista normale	20	380	400
Tot	100	500	600

Sotto H_0 (indipendenza) le attese $E = \text{riga} \times \text{colonna} / n$ valgono **33,3; 166,7; 66,7; 333,3**. Con $g = 1$ usiamo la formula compatta:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} = \frac{600 \cdot 28000^2}{200 \cdot 400 \cdot 100 \cdot 500} = 117,6$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 117,6 \gg 3,841$: si rifiuta H_0 . Esiste un'associazione molto forte tra vista difettosa e cadute (40% di cadute contro 5%, $p < 0,05$).

PROBLEMA 2

Distribuzione dei fumatori

CONSEGNA

In Spagna i fumatori si ripartiscono in: non fumatori 50%, moderati 30%, accaniti 20%. In un campione di 100 soggetti si osservano NF 46, FM 33, FA 21. C'è divergenza tra campione e popolazione?

Test di bontà d'adattamento, $g = k - 1 = 2$. Attese: 50, 30, 20.

$$\chi^2 = \frac{(46 - 50)^2}{50} + \frac{(33 - 30)^2}{30} + \frac{(21 - 20)^2}{20} = 0,32 + 0,30 + 0,05 = 0,67$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 0,67 < 5,991$: non si rifiuta H_0 . Il campione è compatibile con la popolazione: nessuna divergenza significativa ($p > 0,05$).



PROBLEMA 3

Efficacia di un vaccino

CONSEGNA

Su 200 soggetti, 107 vaccinati e 93 no. Tra i vaccinati 20 si ammalano; tra i non vaccinati 42. Verificare se il vaccino è efficace.

FREQUENZE OSSERVATE

	Malato	Sano	Tot
Vaccinato	20	87	107
Non vacc.	42	51	93
Tot	62	138	200

Test χ^2 di indipendenza, $g = 1$. Malati: **18,7%** tra i vaccinati contro **45,2%** tra i non vaccinati.

$$\chi^2 = \frac{200(20 \cdot 51 - 87 \cdot 42)^2}{107 \cdot 93 \cdot 62 \cdot 138} = 16,30$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 16,30 > 3,841$: si rifiuta H_0 . Vaccinazione e malattia **sono associate** e i vaccinati si ammalano molto meno: il vaccino è **efficace** ($p < 0,05$), quindi la campagna vaccinale è giustificata.

PROBLEMA 4

Due docenti: stesso livello di esigenza?

CONSEGNA

Due docenti correggono gli **stessi** 114 esami: promossi da entrambi 45, bocciati da entrambi 30, promossi da A e bocciati da B 15, bocciati da A e promossi da B 24. Il livello di esigenza è uguale? ($\alpha = 0,05$)

COPPIE DI GIUDIZI

A \ B	B promuove	B boccia	Tot
A promuove	45	15	60
A boccia	24	30	54
Tot	69	45	114

Dati **appaiati** (stessi esami) → test di **McNemar** sulle coppie discordi $b = 15$, $c = 24$:

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c} = \frac{(15 - 24)^2}{39} = 2,08$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 2,08 < 3,841$: **non** si rifiuta H_0 . Non c'è differenza significativa: i due docenti hanno lo **stesso** livello di esigenza ($p > 0,05$).



PROBLEMA 5

Nuovo analgesico contro il vecchio

CONSEGNA

Trial su 150 persone: 75 col nuovo analgesico, 75 col vecchio. Riduzione del mal di testa a 15 minuti in 39 persone col nuovo e 25 col vecchio. Cosa si può concludere?

FREQUENZE OSSERVATE

	Miglioria	No miglitoria	Tot
Nuovo	39	36	75
Vecchio	25	50	75
Tot	64	86	150

Frequenze attese tutte pari a **32** e **43**. Test χ^2 di indipendenza, $g = 1$:

$$\chi^2 = \frac{(39 - 32)^2}{32} + \frac{(36 - 43)^2}{43} + \frac{(25 - 32)^2}{32} + \frac{(50 - 43)^2}{43} = 5,34$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 5,34 > 3,841$: si rifiuta H_0 . I due analgesici **differiscono**: il nuovo dà miglitoria nel **52%** dei casi contro il **33%** del vecchio ($p < 0,05$).

TEMA 10 · STUDI EPIDEMIOLOGICI

PROBLEMA 6

Colesterolo e infarto del miocardio

CONSEGNA

Si seguono per 10 anni 224 uomini (40–59 anni). Dei 131 con colesterolo >220 mg/dl, 17 hanno un infarto; dei 93 con valori più bassi, 5.

TIPO DI STUDIO E IPOTESI

Si parte dall'esposizione (livello di colesterolo) e si segue il gruppo nel tempo verso l'esito (infarto): è uno studio di **coorte prospettico**. H_0 : colesterolo e infarto sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

Coorte (prospettico)

Misura: RR

OSSERVATE

	Infarto	No infarto	Tot
Col. >220	17	114	131
Col. <220	5	88	93
Tot	22	202	224

TABELLA, TEST E CONCLUSIONE

$$\chi^2 = \frac{224(17 \cdot 88 - 114 \cdot 5)^2}{131 \cdot 93 \cdot 22 \cdot 202} = 3,55$$

$$RR = \frac{17/131}{5/93} = 2,41$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 3,55 < 3,841$ ($p \approx 0,06$): non si rifiuta H_0 . Al 5% l'associazione non è significativa, pur essendo al limite e con $RR \approx 2,4$: servirebbe un campione più ampio per confermarla.



PROBLEMA 7

Sondino nasogastrico e infezione

CONSEGNA

In ospedale si confrontano 50 pazienti con infezione gastrointestinale e 80 senza. Hanno avuto un sondino nasogastrico 49 pazienti infetti e 3 non infetti.

TIPO DI STUDIO E IPOTESI

Si parte dall'esito (casi infetti vs controlli) e si guarda all'indietro l'esposizione (sondino): è uno studio **caso-controllo**. H_0 : sondino e infezione sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

Caso-controllo

Misura: OR

OSSERVATE

	Sondino	No sondino	Tot
Infetto (caso)	49	1	50
Sano (controllo)	3	77	80
Tot	52	78	130

TABELLA, TEST E CONCLUSIONE

$$\chi^2 = \frac{130(49 \cdot 77 - 1 \cdot 3)^2}{50 \cdot 80 \cdot 52 \cdot 78} = 113,9$$

$$OR = \frac{49 \cdot 77}{1 \cdot 3} \text{ molto elevato.}$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 113,9 \gg 3,841$: si rifiuta H_0 . C'è un'associazione fortissima tra sondino nasogastrico e infezione ($p < 0,05$): è un chiaro fattore di rischio.

PROBLEMA 8

Botulismo e carne in scatola

CONSEGNA

Su 13 casi di botulismo e 20 soggetti sani simili, hanno mangiato carne di una certa marca in scatola 11 malati e 4 sani.

TIPO DI STUDIO E IPOTESI

Si confrontano casi (malati) e controlli (sani) guardando all'indietro l'esposizione (carne in scatola): studio **caso-controllo**. H_0 : carne in scatola e botulismo sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

Caso-controllo

Misura: OR

OSSERVATE

	Carne	No carne	Tot
Botulismo	11	2	13
Sano	4	16	20
Tot	15	18	33

TABELLA, TEST E CONCLUSIONE

$$\chi^2 = \frac{33(11 \cdot 16 - 2 \cdot 4)^2}{13 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 18} = 13,27$$

$$OR = \frac{11 \cdot 16}{2 \cdot 4} = 22$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 13,27 > 3,841$: si rifiuta H_0 . La carne in scatola è associata al botulismo ($OR = 22$, $p < 0,05$): è la sorgente più probabile dell'infezione.



PROBLEMA 9

Analgesico: lettura epidemiologica

CONSEGNA

Stesso studio del Problema 5: 150 persone, 75 col nuovo analgesico (39 con miglìoria) e 75 col vecchio (25 con miglìoria).

TIPO DI STUDIO E IPOTESI

È il ricercatore ad assegnare il trattamento (nuovo/vecchio) e a confrontarne gli effetti: studio **sperimentale** (trial clinico controllato). H_0 : i due analgesici hanno la stessa efficacia; H_1 : le efficacie differiscono.

Sperimentale (trial)

Misura: RR

OSSERVATE

	Miglìoria	No	Tot
Nuovo	39	36	75
Vecchio	25	50	75
Tot	64	86	150

TABELLA, TEST E CONCLUSIONE

$$\chi^2 = 5,34 > \chi^2_{0,05;1} = 3,841$$

$$RR = \frac{39/75}{25/75} = 1,56$$

CONCLUSIONE

Si rifiuta H_0 : il nuovo analgesico è **più efficace** del vecchio (miglìoria 52% vs 33%, $RR = 1,56$, $p < 0,05$).

SCHEMA RIASSUNTIVO

Il **test** è sempre il χ^2 sulla tabella di contingenza; cambia solo cosa si calcola in più. **Coorte** → rischio relativo RR (P6). **Caso-controllo** → odds ratio OR (P7, P8). **Sperimentale** → confronto diretto degli esiti (P9). Per i dati **appaiati** si usa invece McNemar (P4).

