



UNIVERSITÀ · STATISTICA E PROBABILITÀ

Il test del chi-quadro

Esercitazione svolta — 6 problemi su associazione, bontà di adattamento e dati appaiati (McNemar), con tabelle, curve χ^2 e soluzioni passo passo.

6 problemi · tabelle e curve χ^2 · soluzioni complete

Sei problemi con il test del chi-quadro

Ogni problema riporta la consegna riformulata in italiano e una soluzione completa: ipotesi, tabella osservati/attesi, statistica test e decisione, con una curva χ^2 che mostra la zona di rifiuto.

1	Vista difettosa e cadute	ASSOCIAZIONE 2x2
2	Le leggi di Mendel sui piselli	BONTÀ DI ADATTAMENTO
3	Ripartizione dei fumatori	BONTÀ DI ADATTAMENTO
4	Efficacia di un vaccino	ASSOCIAZIONE 2x2
5	Due ospedali a confronto	BONTÀ DI ADATTAMENTO
6	Due professori, stessa severità?	TEST DI MCNEMAR

PROMEMORIA DI METODO

La statistica test confronta frequenze osservate e attese: $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$. Si rifiuta H_0 se $\chi^2 > \chi^2_{\text{tav}}$.

Associazione (tabella $r \times c$): $E = \frac{\text{tot. riga} \cdot \text{tot. colonna}}{N}$, gradi di libertà $(r - 1)(c - 1)$.

Bontà di adattamento (una variabile, k classi): $E_i = n p_i$, gradi di libertà $k - 1$.

Dati appaiati (stesso soggetto, due valutazioni): test di **McNemar**, $\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}$, 1 grado di libertà.

Valori critici ($\alpha = 0.05$): 1 g.l. $\rightarrow 3,84$; 2 g.l. $\rightarrow 5,99$; 3 g.l. $\rightarrow 7,82$.

ESERCIZIO 1 ★★☆☆

Vista difettosa e cadute

Per studiare il legame fra vista difettosa e cadute negli anziani si seguono per 5 anni **200 anziani con vista difettosa (VD)** e **400 con vista normale (VN)**. Cadono **80** anziani del primo gruppo e **20** del secondo.

Verifica con un test χ^2 ($\alpha = 0,05$) se esiste **associazione** fra la vista e il rischio di cadute.

SOLUZIONE

Ipotesi. H_0 : vista e cadute sono *indipendenti*; H_1 : sono *associate*.

	Caduta	No caduta	Totale
Vista difettosa	80 <i>attesa 33,3</i>	120 <i>attesa 166,7</i>	200
Vista normale	20 <i>attesa 66,7</i>	380 <i>attesa 333,3</i>	400
Totale	100	500	600

Frequenze osservate (e attese sotto H_0).

Le frequenze attese si calcolano come $E_{ij} = \frac{\text{tot. riga} \cdot \text{tot. colonna}}{N}$, ad esempio

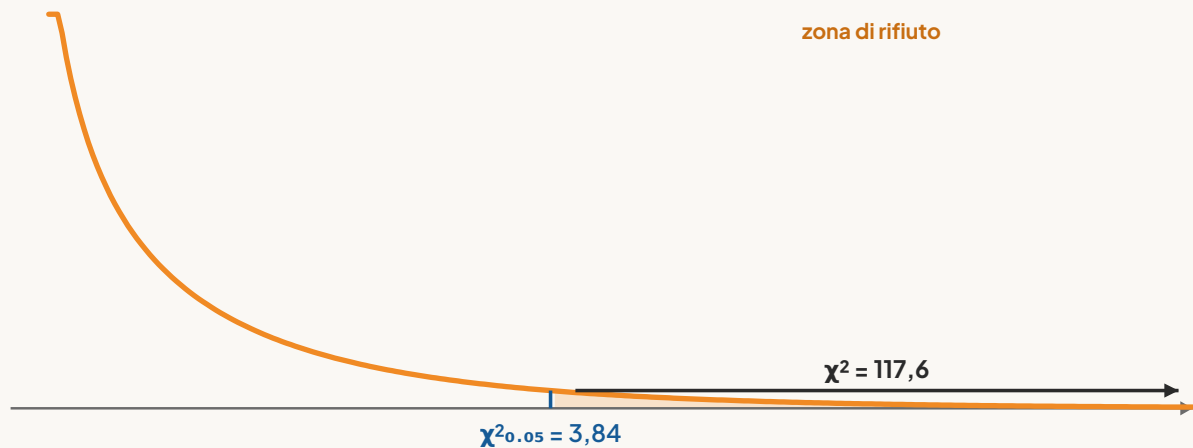
$$E = \frac{200 \cdot 100}{600} = 33.3.$$

La statistica test è:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} = \frac{(80 - 33.3)^2}{33.3} + \frac{(120 - 166.7)^2}{166.7} + \frac{(20 - 66.7)^2}{66.7} + \frac{(380 - 333.3)^2}{333.3} \approx 117.6$$

I gradi di libertà sono $(2 - 1)(2 - 1) = 1$, quindi $\chi_{\text{tav}}^2 = 3.84$.

Distribuzione χ^2 (1 grado di libertà)



Poiché $117.6 > 3.84$, **rifutiamo H_0** : esiste un'associazione molto forte fra vista difettosa e cadute.

Per le tabelle 2×2 alcuni testi usano la correzione di Yates ($\chi^2 \approx 115,1$): la conclusione non cambia.

CONCLUSIONE

χ^2	117.6
Valore critico (1 g.l.)	3.84
Esito	Rifiuto H_0 — associazione presente

ESERCIZIO 2 ★★☆☆

Le leggi di Mendel sui piselli

Secondo le leggi di Mendel, le quattro classi di piselli (AL, AR, VL, VR) si attendono nel rapporto **9 : 3 : 3 : 1**. Su **470 piselli** si osservano: AL = 262, AR = 91, VL = 86, VR = 31.

Verifica con un test χ^2 ($\alpha = 0,05$) se i dati sono compatibili con il modello mendeliano.

SOLUZIONE

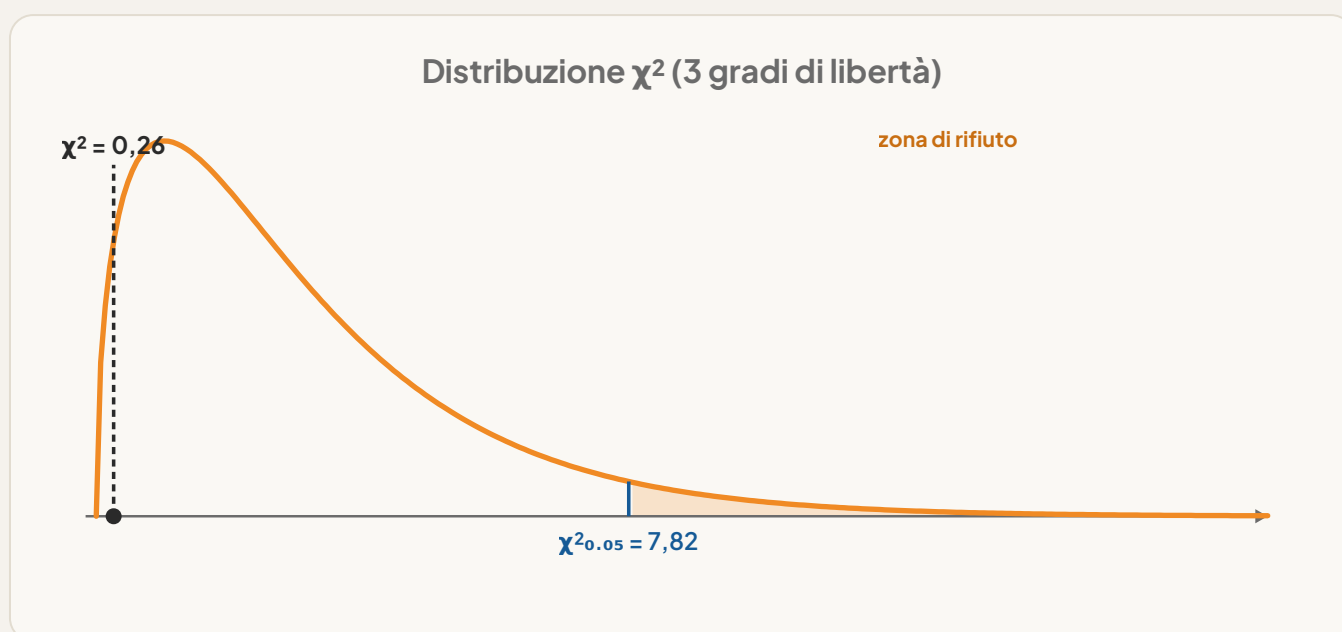
Ipotesi. H_0 : i dati seguono il rapporto 9:3:3:1; H_1 : no.

Categoria	Osservati (O)	Attesi (E)
AL	262	264,4
AR	91	88,1
VL	86	88,1
VR	31	29,4
Totale	470	470

Attesi: $E = 470 \cdot (9, 3, 3, 1)/16$.

$$\chi^2 = \frac{(262 - 264.4)^2}{264.4} + \frac{(91 - 88.1)^2}{88.1} + \frac{(86 - 88.1)^2}{88.1} + \frac{(31 - 29.4)^2}{29.4} \approx 0.26$$

Gradi di libertà $4 - 1 = 3$, quindi $\chi^2_{\text{tav}} = 7.82$.



Poiché $0.26 < 7.82$, **non rifiutiamo** H_0 : i dati sono pienamente compatibili con le leggi di Mendel.

CONCLUSIONE

χ^2 0.26

Valore critico (3 g.l.) 7.82

Esito **Non rifiuto H_0 — compatibile con Mendel**

ESERCIZIO 3 ★☆☆

Ripartizione dei fumatori

Si ipotizza che i fumatori si ripartiscano così: **non fumatori 50%, moderati 30%, forti 20%**. Su un campione di **100 persone** si osservano: NF = 46, FM = 33, FF = 21.

Verifica con un test χ^2 ($\alpha = 0,05$) se il campione diverge dalla ripartizione attesa.

SOLUZIONE

Ipotesi. H_0 : il campione segue 50/30/20; H_1 : diverge.

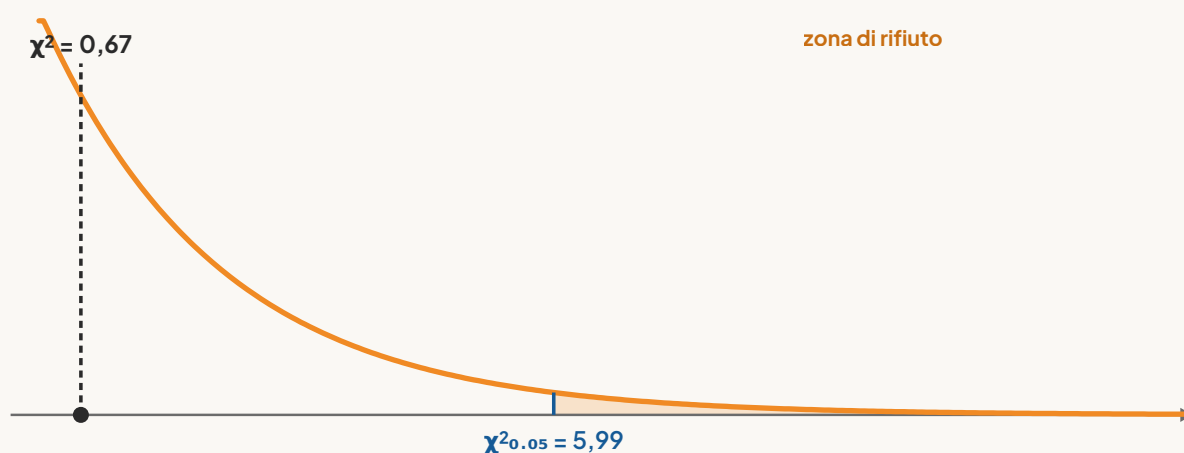
Categoria	Osservati (O)	Attesi (E)
Non fumatori	46	50
Moderati	33	30
Forti	21	20
Totale	100	100

Attesi: $E = 100 \cdot (0,50; 0,30; 0,20)$.

$$\chi^2 = \frac{(46 - 50)^2}{50} + \frac{(33 - 30)^2}{30} + \frac{(21 - 20)^2}{20} = 0,32 + 0,30 + 0,05 = 0,67$$

Gradi di libertà $3 - 1 = 2$, quindi $\chi^2_{\text{tav}} = 5,99$.

Distribuzione χ^2 (2 gradi di libertà)



Poiché $0,67 < 5,99$, **non rifiutiamo** H_0 : non c'è divergenza significativa fra il campione e la popolazione.

CONCLUSIONE

χ^2 0.67

Valore critico (2 g.l.) 5.99

Esito Non rifiuto H_0 — nessuna divergenza

ESERCIZIO 4 ★★☆☆

Efficacia di un vaccino

Su **200 soggetti**, **107 sono vaccinati** e **93 no**. Fra i vaccinati **20** si ammalano; fra i non vaccinati **42**.

Verifica con un test χ^2 ($\alpha = 0,05$) se la vaccinazione è **associata** alla malattia, cioè se il vaccino risulta efficace.

SOLUZIONE

Ipotesi. H_0 : vaccinazione e malattia indipendenti; H_1 : associate.

	Malati	Sani	Totale
Vaccinati	20 <i>attesa 33,2</i>	87 <i>attesa 73,8</i>	107
Non vaccinati	42 <i>attesa 28,8</i>	51 <i>attesa 64,2</i>	93
Totale	62	138	200

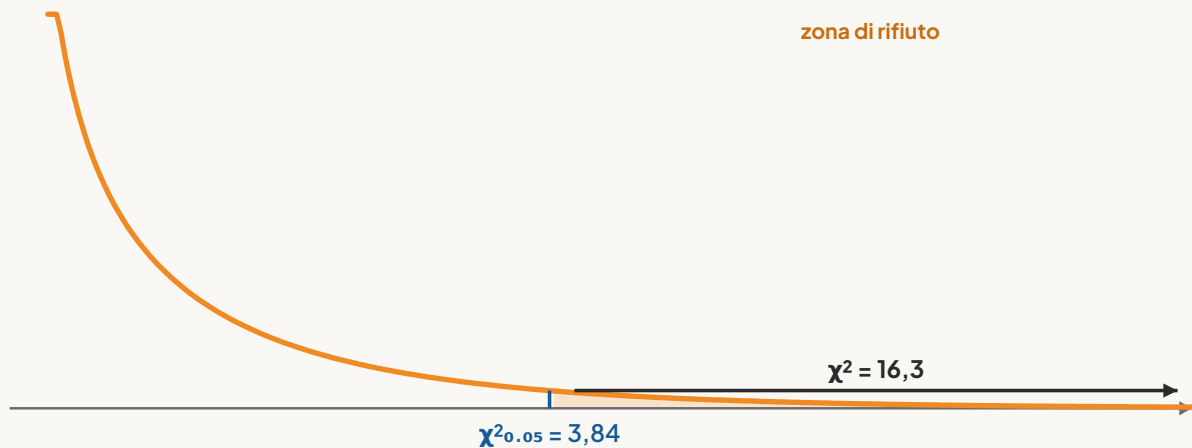
Frequenze osservate (e attese sotto H_0).

Con $E_{ij} = \frac{\text{tot. riga} \cdot \text{tot. colonna}}{200}$ (ad esempio $E = \frac{107 \cdot 62}{200} = 33.2$):

$$\chi^2 = \frac{(20 - 33.2)^2}{33.2} + \frac{(87 - 73.8)^2}{73.8} + \frac{(42 - 28.8)^2}{28.8} + \frac{(51 - 64.2)^2}{64.2} \approx 16.3$$

Gradi di libertà 1, quindi $\chi^2_{\text{tav}} = 3.84$.

Distribuzione χ^2 (1 grado di libertà)



Poiché $16.3 > 3.84$, **rifutiamo** H_0 : la vaccinazione è significativamente associata a una minore frequenza di malattia. Il dato sostiene la scelta di estendere la vaccinazione.

Con la correzione di Yates $\chi^2 \approx 15,1$: stessa conclusione.

CONCLUSIONE

χ^2 16.3

Valore critico (1 g.l.) 3.84

Esito **Rifiuto H_0 — vaccino efficace**

ESERCIZIO 5 ★★☆☆

Due ospedali a confronto

Nell'ospedale A i casi di una malattia si distribuiscono: **tipo I 15%, tipo II 30%, tipo III 55%**.

Nell'ospedale B, anni dopo, su **500 pazienti** si osservano: tipo I = 68, tipo III = 240 (quindi tipo II = 192).

I dati dell'ospedale B **confermano** l'ipotesi di A ($\alpha = 0,05$)?

SOLUZIONE

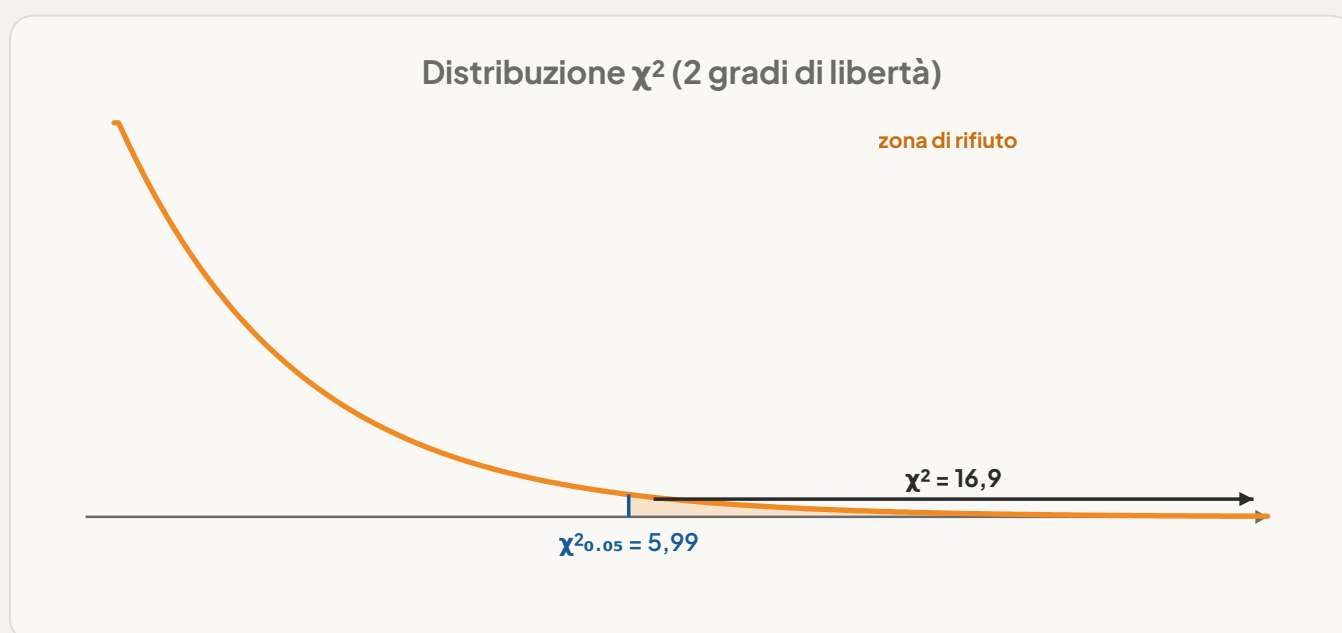
Ipotesi. H_0 : B segue la ripartizione 15/30/55; H_1 : no.

Categoria	Osservati (O)	Attesi (E)
Tipo I	68	75
Tipo II	192	150
Tipo III	240	275
Totale	500	500

Attesi: $E = 500 \cdot (0,15; 0,30; 0,55)$.

$$\chi^2 = \frac{(68 - 75)^2}{75} + \frac{(192 - 150)^2}{150} + \frac{(240 - 275)^2}{275} \approx 0.65 + 11.76 + 4.45 = 16.87$$

Gradi di libertà 2, quindi $\chi^2_{\text{tav}} = 5.99$.



Poiché $16.87 > 5.99$, **rifutiamo** H_0 : i dati dell'ospedale B **non confermano** l'ipotesi formulata da A.

CONCLUSIONE

χ^2 16.87

Valore critico (2 g.l.) 5.99

Esito **Rifiuto H_0 — B non conferma A**

ESERCIZIO 6 ★★★

Due professori, stessa severità?

Due professori correggono gli **stessi 114 compiti**. Risultati: promossi da entrambi **45**; bocciati da entrambi **30**; promossi da A ma bocciati da B **15**; bocciati da A ma promossi da B **24**.

Il livello di severità è uguale per i due professori ($\alpha = 0,05$)?

SOLUZIONE

I dati sono **appaiati** (lo stesso compito è valutato da entrambi): si usa il **test di McNemar**, che confronta solo le celle discordanti.

A ↓ / B →	B: promosso	B: bocciato	Totale
A: promosso	45	15	60
A: bocciato	24	30	54
Totale	69	45	114

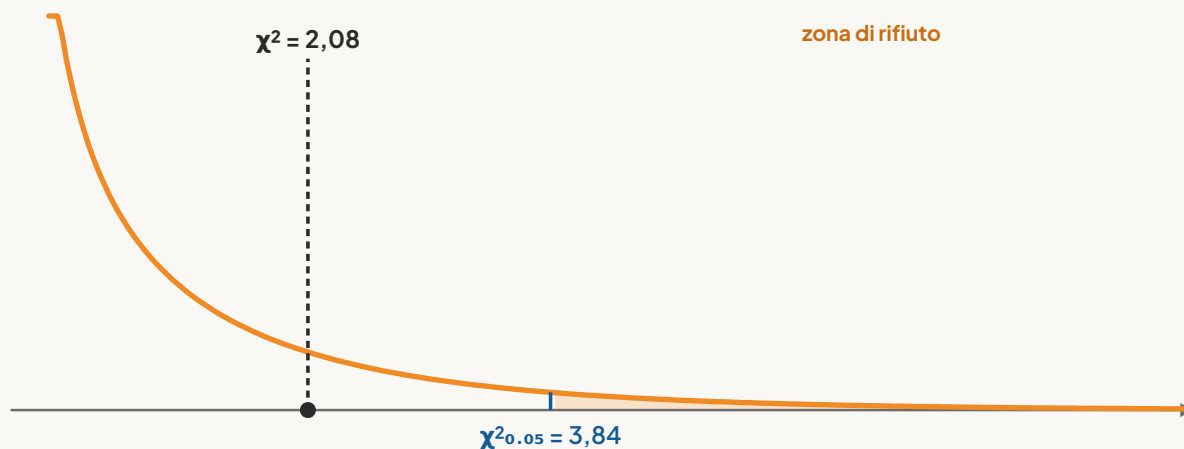
Dati appaiati: in arancione le celle discordanti ($b = 15$, $c = 24$).

Ipotesi. H_0 : stessa severità ($b = c$); H_1 : diversa.

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c} = \frac{(15 - 24)^2}{15 + 24} = \frac{81}{39} \approx 2.08$$

Gradi di libertà 1, quindi $\chi^2_{\text{tav}} = 3.84$.

Distribuzione χ^2 (1 grado di libertà)



Poiché $2.08 < 3.84$, **non rifiutiamo** H_0 : non c'è differenza significativa di severità fra i due professori.

Con la correzione di Yates $\chi^2 = (|b-c|-1)^2/(b+c) = 64/39 \approx 1,64$: stessa conclusione.

CONCLUSIONE

χ^2 2.08

Valore critico (1 g.l.) 3.84

Esito **Non rifiuto H_0 — severità uguale**