

Distribuzioni di probabilità

Formulario di riferimento: variabili aleatorie discrete e continue, momenti e approssimazioni.

Proprietà generali

Valgono per ogni variabile aleatoria: valore atteso, varianza, covarianza.

VALORE ATTESO – LINEARITÀ

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

VALORE ATTESO – ADDITIVITÀ

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

VARIANZA – TRASFORMAZIONE AFFINE

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

VARIANZA DI UNA SOMMA

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

COVARIANZA

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

COVARIANZA DALLE VARIANZE

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\text{Var}(X + Y) - [\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)]}{2}$$

Definizione di media e varianza

Caso discreto

VALORE ATTESO

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Caso continuo

VALORE ATTESO

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

VARIANZA

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

Distribuzioni discrete

Bernoulliana

$$X \sim Be(p)$$

Un solo esperimento con due esiti: successo (1) o insuccesso (0).

FUNZIONE DI MASSA

CORRETTA

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, \quad k \in \{0, 1\}$$

VALORE ATTESO

$$E(X) = p$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = p(1-p)$$

Binomiale

$$X \sim Bi(n, p)$$

Numero di successi in n prove indipendenti, con probabilità p costante.

FUNZIONE DI MASSA

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

VALORE ATTESO

$$E(X) = np$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

Geometrica

$$X \sim G(p)$$

Numero di prove necessarie per ottenere il primo successo.
Assenza di memoria.

FUNZIONE DI MASSA

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

FUNZIONE DI
RIPARTIZIONE

$$P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$$

VALORE ATTESO

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ipergeometrica

$$X \sim Ig(N, M, n)$$

Numero di successi in n estrazioni senza reinserimento (prove dipendenti) da una popolazione di N elementi, di cui M successi.

FUNZIONE DI MASSA

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

VALORE ATTESO

COMPLETATA

$$E(X) = n \frac{M}{N}$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

Poisson

$$X \sim P(\lambda)$$

Numero di occorrenze in un intervallo continuo (tempo, lunghezza...). Approssima la binomiale con n grande e p piccolo.

FUNZIONE DI MASSA

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \geq 0$$

VALORE ATTESO

$$E(X) = \lambda$$

VARIANZA

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Distribuzioni continue



Uniforme continua

$$X \sim U(a, b)$$

Ogni valore nell'intervallo (a, b) è ugualmente probabile.

DENSITÀ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VALORE ATTESO
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

VARIANZA
$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Esponenziale

$$X \sim E(\lambda)$$

Tempo di attesa fino al primo evento di un processo di Poisson.
Assenza di memoria.

DENSITÀ
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE
$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

VALORE ATTESO
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

VARIANZA
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ASSENZA DI MEMORIA
$$P(X > T + t \mid X > t) = P(X > T)$$

Normale (Gaussiana)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Modello simmetrico a campana; base del teorema del limite centrale.

DENSITÀ
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

VALORE ATTESO
$$E(X) = \mu$$

VARIANZA
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Approssimazioni

Binomiale → Poisson

$$n \geq 100, \quad np \leq 10$$

Con n grande e p piccolo la binomiale si approssima con una Poisson di parametro $\lambda = np$.

$$Bi(n, p) \approx P(\lambda), \quad \lambda = np$$

Binomiale → Normale

$$np \geq 5, \quad n(1-p) \geq 5$$

Con la **correzione di continuità** la binomiale si approssima con una normale di media np e varianza $np(1-p)$.

$$P(X < x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - \mu}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad \mu = np$$