



● SEZIONE 1

Densità di probabilità

DEFINIZIONE

Variabile aleatoria continua

Una variabile aleatoria X è **continua** quando può assumere tutti i valori di un intervallo di $\mathbb{R}$. La sua distribuzione è descritta da una funzione **densità di probabilità** $f(x)$: le probabilità si leggono come **aree** sotto il grafico di f , non come valori di f .

PROPRIETÀ · DENSITÀ

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$f(x) \geq 0$ la densità non è mai negativa $\int f = 1$ area totale unitaria (normalizzazione)

PROBABILITÀ SU UN INTERVALLO

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Per una v.a. continua $P(X = c) = \int_c^c f(x) dx = 0$: i singoli punti hanno probabilità nulla, quindi
 $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

● SEZIONE 2

Funzione di ripartizione

DEFINIZIONE · CDF

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$F(x)$ probabilità cumulata fino a x $f(t)$ densità integranda



LEGAME DENSITÀ ↔ RIPARTIZIONE

$$f(x) = F'(x)$$

Dove F è derivabile, la densità è la sua derivata. È lo strumento per passare da F a f (e viceversa per integrazione).

PROPRIETÀ · CDF

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad F \text{ non decrescente e continua} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

PROBABILITÀ DALLA CDF

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad P(X > a) = 1 - F(a)$$

Utilissime quando F è già nota: la probabilità di un intervallo è una semplice differenza, senza ricalcolare integrali.

● SEZIONE 3

Indici sintetici

VALORE ATTESO (MEDIA)

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

VARIANZA E DEVIATION STANDARD

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$E(X^2)$ si calcola con $g(x) = x^2$; la formula $E(X^2) - \mu^2$ è quasi sempre più rapida della definizione con $(x - \mu)^2$.

TRASFORMAZIONI LINEARI

$$E(aX + b) = a E(X) + b \quad \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

MEDIANA E QUANTILI

$$F(m) = \frac{1}{2} \text{ (mediana)} \quad F(x_p) = p \text{ (quantile di ordine } p)$$

La mediana m divide l'area in due metà uguali; il percentile p -esimo è il valore x_p tale che $F(x_p) = p$.



ERRORE COMUNE

La densità non è una probabilità

SBAGLIATO

 $f(x)$ è una probabilità e $f(x) \leq 1$

CORRETTO

 $f(x) \geq 0$, ma può essere $f(x) > 1$; $P = \text{area}$

Per una v.a. continua la probabilità è l'**area** sotto f , non l'altezza. f può superare 1 (basta che l'area totale sia 1) e in un singolo punto $P(X = c) = 0$.

● ESERCIZI SVOLTI

Cinque esercizi con soluzione

ESERCIZIO 1



Dalla densità alla funzione di ripartizione

Data la densità $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ trovare $F(x)$ e la mediana.

SVOLGIMENTO

Si integra a tratti $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Per $0 \leq x \leq 1$: $\int_0^x 2t dt = [t^2]_0^x = x^2$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Mediana: $F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Risultato — $F(x) = x^2$ su $[0, 1]$; $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.

ESERCIZIO 2

★★☆

Media e probabilità di una densità polinomiale

Data $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$ sull'intervallo $[0, 2]$, calcolare il valor medio μ , $P(X = \frac{4}{3})$ e $P(0 \leq X \leq 1)$.

SVOLGIMENTO

Media:

$$\mu = \int_0^2 x \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right) dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5 \right]_0^2 = \frac{6}{5}$$

Probabilità puntuale (v.a. continua):

$$P(X = \frac{4}{3}) = \int_{4/3}^{4/3} f(x) dx = 0$$

Probabilità su intervallo:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

Risultato — $\mu = \frac{6}{5} = 1,2$; $P(X = \frac{4}{3}) = 0$; $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{5}{16} = 0,3125$.

ESERCIZIO 3

★★☆

Costante di normalizzazione e probabilità

Determinare k affinché $f(x) = kx$ su $[0, 3]$ (nulla altrove) sia una densità; ricavare $F(x)$ e $P(1 \leq X \leq 2)$.

SVOLGIMENTO

Imposto la normalizzazione:

$$\int_0^3 kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

Ripartizione per $0 \leq x \leq 3$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{9}t dt = \frac{1}{9}x^2$$

Probabilità come differenza di F :

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Risultato — $k = \frac{2}{9}$; $F(x) = \frac{x^2}{9}$ su $[0, 3]$; $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{3} \approx 0,333$.

ESERCIZIO 4



Dalla ripartizione alla densità

Sia $F(x) = 1 - e^{-x}$ per $x \geq 0$ (e $F(x) = 0$ per $x < 0$). Trovare $f(x)$, $P(X > 1)$ e la media.

SVOLGIMENTO

Densità per derivazione, $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-x}) = e^{-x} \quad (x \geq 0)$$

Coda destra con il complemento:

$$P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

Media (integrazione per parti):

$$\mu = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + 1 = 1$$

Risultato — $f(x) = e^{-x}$; $P(X > 1) = e^{-1} \approx 0,368$; $\mu = 1$.

ESERCIZIO 5



Media, varianza e deviazione standard

Data $f(x) = \frac{x}{2}$ su $[0, 2]$, calcolare media, varianza e deviazione standard.

SVOLGIMENTO

Media:

$$\mu = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Momento secondo:

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2$$

Varianza e deviazione standard:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Risultato — $\mu = \frac{4}{3} \approx 1,33$; $\sigma^2 = \frac{2}{9} \approx 0,222$; $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,471$.