



INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011



STATISTICA · UNIVERSITÀ · ESERCIZI SVOLTI

Test di ipotesi per variabili qualitative

Dieci esercizi svolti con il test del chi-quadro: associazione tra due caratteri, bontà d'adattamento e dati appaiati (McNemar). Per ognuno: ipotesi, tabella di contingenza, calcolo e conclusione.

Indipendenza

Bontà d'adattamento

McNemar

INFOMAAT — Centro di ripetizioni

Matematica e fisica · liceo e università · dal 2011

infomaat.it

Il test del chi-quadro

Con variabili **qualitative** si confrontano **frequenze**. Si costruisce la tabella di contingenza, si calcolano le frequenze **attese** sotto H_0 e si misura quanto le osservate se ne discostano.

STATISTICA TEST E FREQUENZE ATTESE

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \quad E_{ij} = \frac{(\text{tot. riga}) (\text{tot. colonna})}{n}$$

Per una tabella 2×2 la formula compatta (con $g = 1$):

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

BONTÀ D'ADATTAMENTO

Distribuzione osservata vs teorica su k classi,
 $g = k - 1$.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

DATI APPAIATI - MCNEMAR

Stesse unità classificate due volte: contano
solo le coppie discordi b, c . $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}$$

REGOLA DI DECISIONE

Valori critici: $\chi^2_{0,05;1} = 3,84$, $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$, $\chi^2_{0,001;2} = 13,82$. Se $\chi^2 > \chi^2_{\text{tab}}$ si rifiuta H_0 : le variabili sono associate / c'è divergenza ($p < \alpha$). Le frequenze attese dovrebbero essere ≥ 5 .



PROBLEMA 1

Vista difettosa e cadute

CONSEGNA

Si seguono per 5 anni 200 anziani con vista difettosa e 400 con vista normale: cadono 80 del primo gruppo e 20 del secondo. Verificare ($\alpha = 0,05$) se vista e cadute sono associate.

Ipotesi. H_0 : vista e cadute sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

OSSERVATE (ATTESE)

	Caduta	No caduta	Tot
Vista difett.	80	120	200
Vista normale	20	380	400
Tot	100	500	600

Attese sotto H_0 : **33,3; 166,7; 66,7; 333,3**. Tutte ≥ 5 :
il test è applicabile, $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} = \frac{600 \cdot 28000^2}{200 \cdot 400 \cdot 100 \cdot 500} = 117,6$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 117,6 \gg 3,84$: si rifiuta H_0 . Vista e cadute sono **associate**; con vista difettosa la percentuale di cadute è molto più alta (40% contro 5%, $p < 0,05$).

PROBLEMA 2

Distribuzione dei fumatori

CONSEGNA

In Spagna: non fumatori 50%, moderati 30%, accaniti 20%. In un campione di 100 soggetti si osservano NF 46, FM 33, FA 21. Il campione è compatibile con la popolazione?

Ipotesi. H_0 : nessuna divergenza (le proporzioni coincidono); H_1 : le proporzioni differiscono.

FREQUENZE · BONTÀ D'ADATTAMENTO ($g = 2$)

	NF	FM	FA	Tot
Osservate	46	33	21	100
Attese	50	30	20	100

$$\chi^2 = \frac{(46 - 50)^2}{50} + \frac{(33 - 30)^2}{30} + \frac{(21 - 20)^2}{20} = 0,32 + 0,30 + 0,05 = 0,67$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 0,67 < 5,99$: **non** si rifiuta H_0 . Il campione è compatibile con la popolazione spagnola: nessuna divergenza significativa ($p > 0,05$).



PROBLEMA 3

Efficacia di un vaccino

CONSEGNA

Su 200 soggetti, 107 vaccinati e 93 no. Tra i vaccinati 20 si ammalano, tra i non vaccinati 42. Il vaccino è efficace?

Ipotesi. H_0 : la proporzione di malati è uguale nei due gruppi; H_1 : le proporzioni differiscono.

OSSERVATE

	Malato	Sano	Tot
Vaccinato	20	87	107
Non vacc.	42	51	93
Tot	62	138	200

Malati: **18,7%** tra i vaccinati (20/107) contro **45,2%** tra i non vaccinati (42/93). $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{200(20 \cdot 51 - 87 \cdot 42)^2}{107 \cdot 93 \cdot 62 \cdot 138} = 16,3$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 16,3 > 3,84$: si rifiuta H_0 . I vaccinati si ammalano molto meno: il vaccino è **efficace** ($p < 0,05$), quindi la vaccinazione è giustificata.

PROBLEMA 4

Due docenti: stesso livello di esigenza?

CONSEGNA

Due docenti correggono gli **stessi** 114 esami: promossi da entrambi 45, bocciati da entrambi 30, promossi da A e bocciati da B 15, bocciati da A e promossi da B 24. Il livello di esigenza è uguale? ($\alpha = 0,05$)

Ipotesi. H_0 : la proporzione di promossi è uguale per A e B; H_1 : le proporzioni differiscono.

COPPIE DI GIUDIZI

A \ B	B promuove	B boccia	Tot
A promuove	45	15	60
A boccia	24	30	54
Tot	69	45	114

Dati **appaiati** → test di McNemar sulle coppie discordi $b = 15, c = 24, g = 1$:

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c} = \frac{(15 - 24)^2}{39} = 2,08$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 2,08 < 3,84$: **non** si rifiuta H_0 . I due docenti hanno lo **stesso** livello di esigenza ($p > 0,05$).

Nota: i dati sono appaiati (gli stessi esami), come nel problema 10, quindi McNemar è il test corretto. Un test di indipendenza sui totali marginali darebbe $\chi^2 = 1,44$: stessa conclusione.



PROBLEMA 5

Nuovo analgesico contro il vecchio

CONSEGNA

150 persone: 75 col nuovo analgesico, 75 col vecchio. A 15 minuti la cefalea diminuisce in 39 persone col nuovo e 25 col vecchio. Cosa si conclude?

Ipotesi. H_0 : i due analgesici hanno la stessa efficacia; H_1 : le efficacie differiscono.

OSSERVATE (ATTESE)

	Miglioria	No migioria	Tot
Nuovo	39	36	75
Vecchio	25	50	75
Tot	64	86	150

Attese tutte pari a **32** e **43**. Miglioria: **52%** col nuovo, **33%** col vecchio. $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{(39 - 32)^2}{32} + \frac{(36 - 43)^2}{43} + \frac{(25 - 32)^2}{32} + \frac{(50 - 43)^2}{43} = 5,34$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 5,34 > 3,84$: si rifiuta H_0 . I due analgesici **differiscono**: il nuovo è più efficace (52% contro 33%, $p < 0,05$).

PROBLEMA 6

Colesterolo e infarto

CONSEGNA

224 uomini (40-59 anni) seguiti per 10 anni: dei 131 con colesterolo >220 mg/dl, 17 hanno un infarto; dei 93 con valori più bassi, 5. Che si conclude?

Ipotesi. H_0 : colesterolo e infarto sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

OSSERVATE

	Infarto	No infarto	Tot
Col. >220	17	114	131
Col. <220	5	88	93
Tot	22	202	224

Attese tutte ≥ 5 (test applicabile). Infarto: **13%** contro **5,4%**. $g = 1$.

$$\chi^2 = \frac{224(17 \cdot 88 - 114 \cdot 5)^2}{131 \cdot 93 \cdot 22 \cdot 202} = 3,55$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 3,55 < 3,84$ ($p > 0,05$): **non** si rifiuta H_0 . Al 5% non si può dimostrare un'associazione tra colesterolo e infarto, pur essendo il risultato al limite.



PROBLEMA 7

Sondino nasogastrico e infezione

CONSEGNA

Si confrontano 50 pazienti con infezione gastrointestinale e 80 senza. Hanno avuto un sondino nasogastrico 49 infetti e 3 non infetti. C'è relazione?

Ipotesi. H_0 : sondino e infezione sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

OSSERVATE

Attese: 20; 30; 32; 48 (tutte ≥ 5). $g = 1$.

	Sondino	No sondino	Tot
Infetto	49	1	50
Non infetto	3	77	80
Tot	52	78	130

$$\chi^2 = \frac{130(49 \cdot 77 - 1 \cdot 3)^2}{50 \cdot 80 \cdot 52 \cdot 78} = 113,9$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 113,9 \gg 3,84$ ($p < 0,001$): si rifiuta H_0 . Il sondino nasogastrico aumenta nettamente il rischio di infezione: forte **associazione**.

PROBLEMA 8

Botulismo e carne in scatola

CONSEGNA

13 casi di botulismo confrontati con 20 soggetti sani simili: hanno mangiato carne di una certa marca in scatola 11 malati e 4 sani. La carne era contaminata?

Ipotesi. H_0 : carne in scatola e botulismo sono indipendenti; H_1 : esiste associazione.

OSSERVATE

Attese: 5,9; 7,1; 9,1; 10,9 (tutte ≥ 5). $g = 1$.

	Carne	No carne	Tot
Botulismo	11	2	13
Sano	4	16	20
Tot	15	18	33

$$\chi^2 = \frac{33(11 \cdot 16 - 2 \cdot 4)^2}{13 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 18} = 13,3$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 13,3 > 3,84$ ($p < 0,001$): si rifiuta H_0 . La carne in scatola è fortemente **associata** al botulismo: è la sorgente più probabile dell'intossicazione.



PROBLEMA 9

Consumo di farmaci: Spagna vs Portogallo

CONSEGNA

In Spagna il consumo è: analgesici 70%, antibiotici 25%, sedativi 5%. In Portogallo, su 600 persone: 390 analgesici, 150 antibiotici, 60 sedativi. Il consumo è uguale nei due Paesi ($\alpha = 0,001$)? In quale Paese si consuma di più ciascun farmaco?

Ipotesi. H_0 : il Portogallo consuma come la Spagna; H_1 : i consumi differiscono.

BONTÀ D'ADATTAMENTO ($G = 2$)

Farmaco	Oss. (Port.)	Attese	(O-E) ² /E
Analgesici	390	420	2,14
Antibiotici	150	150	0,00
Sedativi	60	30	30,00
Tot	600	600	32,14

$$\chi^2 = \frac{(390 - 420)^2}{420} + \frac{(150 - 150)^2}{150} + \frac{(60 - 30)^2}{30} = 32,14$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 32,14 > 13,82$: si rifiuta H_0 . I consumi **differiscono** tra i due Paesi. Confrontando le percentuali del Portogallo: **antibiotici** 25% = 25% (uguali); **analgesici** 65% < 70% (più in Spagna); **sedativi** 10% > 5% (più in Portogallo).

PROBLEMA 10

Due bilance: stessa precisione?

CONSEGNA

Due bilance pesano gli stessi 35 campioni di compresse; per ognuno si registra se le due hanno coinciso (=) o se una ha pesato in eccesso (+). Hanno la stessa precisione?

Ipotesi. H_0 : le due bilance hanno la stessa precisione; H_1 : le precisioni differiscono.

COPPIE DI ESITI

A \ B	B: =	B: +	Tot
A: =	20	6	26
A: +	9	0	9
Tot	29	6	35

Variabili **appaiate** (stessi campioni) → McNemar sulle coppie discordi $b = 6, c = 9, g = 1$:

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c} = \frac{(9 - 6)^2}{15} = 0,6$$

CONCLUSIONE

$\chi^2 = 0,6 < 3,84$: **non** si rifiuta H_0 . Le due bilance hanno la **stessa** precisione: le differenze osservate rientrano nel caso ($p > 0,05$).

