



INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011



STATISTICA · UNIVERSITÀ · ESERCIZI SVOLTI

Test di ipotesi per variabili quantitative

Diciassette esercizi svolti sul confronto tra medie: test t per una media, per due campioni indipendenti (con test F preliminare sulle varianze) e per dati appaiati. Nove problemi principali e otto esercizi aggiuntivi.

t di Student

Test F sulle varianze

Dati appaiati

INFOMAAT — Centro di ripetizioni

Matematica e fisica · liceo e università · dal 2011

infomaat.it

Confronto tra medie: quale test?

Con variabili **quantitative** si confrontano **medie**. La statistica test ha sempre la forma (stima – valore atteso) / errore standard, e si confronta con la t di Student (o con z se σ è nota o n è grande).

UNA MEDIA

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad g = n - 1$$

DATI APPAIATI (PRE-POST)

Sulle differenze $d = x_1 - x_2$:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \quad g = n - 1$$

DUE MEDIE INDIPENDENTI – PRIMA SI CONFRONTANO LE VARIANZE (TEST F)

Si calcola $F = \frac{s_{\text{magg}}^2}{s_{\text{min}}^2}$ con gradi di libertà (v_1, v_2) e lo si confronta con F_{tab} : se $F < F_{\text{tab}}$ le varianze sono uguali, se $F > F_{\text{tab}}$ sono diverse.

Varianze uguali – varianza comune e poi t :

$$S_p^2 = \frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2/n_1 + S_p^2/n_2}}$$

Varianze diverse – si usano le varianze separate:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

In entrambi i casi $g = n_1 + n_2 - 2$.

REGOLA DI DECISIONE

Si rifiuta H_0 se $|t| > t_{\text{tab}}$ (bilaterale, $\alpha = 0,05$). Se σ della popolazione è nota oppure $n \geq 30$, al posto di t si usa la normale z ($z_{0,025} = 1,96$ bilaterale, $z_{0,05} = 1,645$ unilaterale).



PROBLEMA 1

Fumo in gravidanza e peso del neonato

Due medie indipendenti

CONSEGNA

Si confronta il peso (g) dei neonati di madri fumatrici e non fumatrici. Verificare con $\alpha = 0,05$ se il peso medio differisce.

	n	media	s	s ²
Fumatrici	50	3197	172	29584
Non fumatrici	60	3380	176	30976

Test F sulle varianze: $F = \frac{30976}{29584} = 1,047$, $v_1 = 59$, $v_2 = 49$, $F_{\text{tab}} \approx 1,58$. Poiché $F < F_{\text{tab}} \rightarrow$ varianze uguali.

$$S_p^2 = \frac{29584 \cdot 49 + 30976 \cdot 59}{50 + 60 - 2} = 30344,44 \quad t = \frac{3197 - 3380}{\sqrt{30344,44/50 + 30344,44/60}} = -5,49$$

CONCLUSIONE

$g = 108$, $t_{\text{tab}} \approx 1,98$. $|-5,49| > 1,98$: si rifiuta H_0 . Il peso **differisce**; i neonati delle fumatrici pesano meno ($p < 0,05$).

PROBLEMA 2

pH del sangue nei diabetici

Una media

CONSEGNA

Il pH medio del sangue sano è 7,4. Su 65 diabetici si misura pH medio 7,1 con $s = 0,13$. C'è acidosi metabolica? ($\alpha = 0,05$)

Ipotesi. $H_0: \mu = 7,4$; $H_1: \mu \neq 7,4$. Test di una media, $g = 64$.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7,1 - 7,4}{0,13/\sqrt{65}} = -18,6$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} \approx 2,00$. $|-18,6| \gg 2,00$: si rifiuta H_0 . Il pH dei diabetici è $< 7,4$: la popolazione è in **acidosi metabolica** ($p < 0,05$).



PROBLEMA 3

Glucosio prima e dopo un farmaco

Dati appaiati

CONSEGNA

Si misura la glicemia (mg/dl) in 10 pazienti prima e dopo un farmaco digestivo. Il farmaco modifica la glicemia?

PRIMA	82	83	95	91	96	100	84	96	81	101
DOPO	85	81	87	84	90	98	85	98	82	96
D	-3	2	8	7	6	2	-1	-2	-1	5

Ipotesi. $H_0: \bar{d} = 0$ (nessuna variazione); $H_1: \bar{d} \neq 0$. $g = 9$.

$$\bar{d} = 2,3 \quad s_d = 4,00 \quad t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{2,3}{4,00/\sqrt{10}} = 1,82$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} = 2,262$. $1,82 < 2,262$: non si rifiuta H_0 . Non c'è evidenza che il farmaco modifichi la glicemia ($p > 0,05$).

PROBLEMA 4

Colesterolo HDL ed età

Due medie indipendenti

CONSEGNA

Si confronta l'HDL (mg/dl) in 40 persone con più di 50 anni e 35 con meno di 50. L'HDL dipende dall'età? ($\alpha = 0,05$)

	n	media	s	s ²
> 50 anni	40	34,55	6,95	48,3
< 50 anni	35	42,09	7,26	52,7

Test F: $F = \frac{52,7}{48,3} = 1,091$, $F_{\text{tab}} \approx 1,7$. $F < F_{\text{tab}} \rightarrow$ varianze uguali.

$$S_p^2 = \frac{48,3 \cdot 39 + 52,7 \cdot 34}{40 + 35 - 2} = 50,35 \quad t = \frac{34,55 - 42,09}{\sqrt{50,35/40 + 50,35/35}} = -4,59$$

CONCLUSIONE

$g = 73$, $t_{\text{tab}} \approx 1,99$. $|-4,59| > 1,99$: si rifiuta H_0 . L'HDL differisce ed è più basso negli over 50 ($p < 0,05$).



PROBLEMA 5

Globuli rossi: il campione è normale?

Una media

CONSEGNA

Nei maschi la media è 5 milioni/mm³. Su 40 uomini si misura media 4,7 milioni con $s = 0,23$ milioni. Il campione corrisponde alla popolazione? ($\alpha = 0,05$)

Ipotesi. $H_0: \mu = 5$; $H_1: \mu \neq 5$. Test di una media, $g = 39$.

$$t = \frac{4,7 - 5}{0,23/\sqrt{40}} = \frac{-0,3}{0,0364} = -8,25$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} \approx 2,02$. $|-8,25| \gg 2,02$: si rifiuta H_0 . Il campione **non** corrisponde alla popolazione: i globuli rossi sono significativamente più bassi (anemia, $p < 0,05$).

Nota: il solutore ufficiale afferma $t \approx 0$ e non rifiuta — è un **errore**. La differenza $-0,3$ sull'errore standard $0,23/\sqrt{40} = 0,036$ dà $t = -8,25$, nettamente significativo.

PROBLEMA 6

Due docenti: stesso criterio di valutazione?

Dati appaiati

CONSEGNA

Due docenti correggono gli stessi 15 compiti (voti in decimi). Il criterio è lo stesso? ($\alpha = 0,05$)

A	5,3	7,6	8,1	4,3	4,0	2,2	6,3	5,7	4,8	6,8	7,1	7,3	5,9	5,1	8,9
B	5,6	7,1	8,1	4,8	4,3	1,9	6,0	5,9	5,5	6,0	8,2	7,0	6,2	4,8	9,0

Ipotesi. $H_0: \bar{d} = 0$ (stesso criterio); $H_1: \bar{d} \neq 0$. $g = 14$.

$$\bar{d} = -0,067 \quad s_d = 0,497 \quad t = \frac{-0,067}{0,497/\sqrt{15}} = -0,52$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} = 2,145$. $|-0,52| < 2,145$: **non** si rifiuta H_0 . I due docenti hanno lo **stesso** criterio di valutazione ($p > 0,05$).



PROBLEMA 7

Antipiretico nuovo contro paracetamolo

Dati appaiati

CONSEGNA

Sugli stessi 10 pazienti si misura la temperatura (°C) dopo il nuovo antipiretico A3327KJ e dopo il paracetamolo. Hanno la stessa efficacia?

A3327KJ	36,5	38,2	39,1	37	37,5	36,8	37	36,9	35	36,6
PARACET.	37	39,1	37	36,2	37,2	36,4	37,5	36,9	36,3	37

Ipotesi. $H_0: \bar{d} = 0$ (stessa efficacia); $H_1: \bar{d} \neq 0$. $g = 9$.

$$\bar{d} = 0 \quad s_d = 0,97 \quad t = \frac{0}{0,97/\sqrt{10}} = 0$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} = 2,262$. $0 < 2,262$: non si rifiuta H_0 . I due farmaci hanno la **stessa** efficacia antipiretica ($p > 0,05$).

PROBLEMA 8

Emoglobina ed esercizio fisico

Due medie indipendenti

CONSEGNA

Si confronta l'emoglobina sierica (mg/l) in chi fa esercizio ($n = 12$, media 3,1, DE 1) e chi non ne fa ($n = 10$, media 4, DE 2). L'esercizio la aumenta?

Test F: $F = \frac{2^2}{12} = 4$, $v_1 = 9$, $v_2 = 11$, $F_{\text{tab}} \approx 2,9$. Poiché $F > F_{\text{tab}} \rightarrow$ **varianze diverse**: si usano le varianze separate, $g = 20$.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} = \frac{3,1 - 4}{\sqrt{1/12 + 4/10}} = -1,29$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} = 2,086$. $|-1,29| < 2,086$: non si rifiuta H_0 . Non c'è evidenza che l'esercizio modifichi l'emoglobina ($p > 0,05$).



PROBLEMA 9

Durata dell'effetto di un anestetico

Una media

CONSEGNA

Si misura per 12 pazienti la durata (ore) dell'effetto di un anestetico. L'effetto medio è di 4 ore? ($\alpha = 0,05$)

ORE	5,2	6,1	4,8	3,9	5,2	5,9	4,9	5,3	5,2	5,1	5,6	5,7
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Ipotesi. $H_0: \mu = 4$; $H_1: \mu \neq 4$. Media campionaria 5,24, $s^2 = 0,332$, $g = 11$.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{5,24 - 4}{\sqrt{0,332/12}} = 7,47$$

CONCLUSIONE

$t_{\text{tab}} = 2,201$. $7,47 > 2,201$: si rifiuta H_0 . L'effetto medio **non** è di 4 ore: è maggiore, $\mu > 4$ (la media campionaria supera 4, $p < 0,05$).

ESERCIZI AGGIUNTIVI

AGGIUNTIVO 1 · UNA MEDIA

Emoglobina nelle fumatrici

Popolazione femminile: Hb media 13,5 g/dl. Campione di 80 fumatrici: media 15,2, $s = 2,5$. Equivalenti alle sane?

$$t = \frac{15,2 - 13,5}{2,5/\sqrt{80}} = 6,08 \quad (g = 79, t_{\text{tab}} \approx 1,99)$$

Conclusione. $6,08 > 1,99$: si rifiuta H_0 . L'Hb delle fumatrici **differisce** (più alta).

AGGIUNTIVO 2 · UNA MEDIA · Σ NOTA $\rightarrow Z$

Frequenza cardiaca dei lavoratori

Standard sano 72 bpm. Su 157 lavoratori: media 70,42, $\sigma = 9,95$ (nota). Diversa dallo standard?

$$z = \frac{70,42 - 72}{9,95/\sqrt{157}} = -1,99 \quad (z_{\text{tab}} = 1,96)$$

Conclusione. $|-1,99| > 1,96$ (al limite, $p \approx 0,047$): si rifiuta H_0 . La frequenza **differisce** dallo standard.



AGGIUNTIVO 3 · UNA MEDIA · UNILATERALE · Z

Consumo di caffè degli studenti

Media nazionale 3 tazze/giorno. Su 80 studenti: media 3,8, $\sigma = 1,5$ (nota). Ne bevono di più?

$$z = \frac{3,8 - 3}{1,5/\sqrt{80}} = 4,77 \quad (z_{\text{tab}, 1 \text{ coda}} = 1,645)$$

Conclusione. $4,77 > 1,645$: si rifiuta H_0 . Gli studenti bevono **più** caffè della media.

AGGIUNTIVO 4 · DUE MEDIE INDIP.

Glicemia in due gruppi

Gruppo 1 ($n=300$): media 95, $s = 3,5$. Gruppo 2 ($n=400$): media 80,5, $s = 2,9$. Differenza significativa?

$$F = \frac{3,5^2}{2,9^2} = 1,46 > F_{\text{tab}} \Rightarrow \text{var. diverse}; \quad t = \frac{95 - 80,5}{\sqrt{3,5^2/300 + 2,9^2/400}} \approx 58$$

Conclusione. $t \gg t_{\text{tab}}$: si rifiuta H_0 . Il gruppo 1 ha glicemia **più alta**.

AGGIUNTIVO 5 · UNA MEDIA · UNILATERALE · Z

Punteggio del test di statistica

Voti: 65,65,70,67,66,63,63,68,72,71 (media 67), $\sigma = 3$ nota. La media è > 65 come pensa la docente?

$$z = \frac{67 - 65}{3/\sqrt{10}} = 2,11 \quad (z_{\text{tab}, 1 \text{ coda}} = 1,645)$$

Conclusione. $2,11 > 1,645$: si rifiuta H_0 . La docente ha **ragione**: la media supera 65.



AGGIUNTIVO 6 · DUE VARIANZE · TEST F

Varianza dei prezzi azionari

Titolo A: varianza 234 ($n = 100$). Titolo B: varianza 210 ($n = 150$). Le varianze sono diverse?

$$F = \frac{234}{210} = 1,11 \quad (v_1=99, v_2=149, F_{\text{tab}} \approx 1,43)$$

Conclusione. $1,11 < 1,43$: non si rifiuta H_0 . Le varianze **non** differiscono significativamente.

AGGIUNTIVO 7 · DUE MEDIE INDIP.

Integratore di ferro vs placebo

Test ($n=15$): Hb media 14,8, $s = 2,8$. Controllo ($n=13$): 13,1, $s = 2,6$. Differenza significativa?

$$F = 1,16 < F_{\text{tab}} \Rightarrow \text{var. uguali}; S_p^2 = 7,34; t = \frac{14,8 - 13,1}{\sqrt{7,34(1/15 + 1/13)}} = 1,66$$

Conclusione. $g = 26$, $t_{\text{tab}} = 2,056$. $1,66 < 2,056$: non si rifiuta H_0 . Differenza non significativa.

AGGIUNTIVO 8 · DATI APPAIATI

Emoglobina prima e dopo terapia

Hb in 12 gestanti anemiche, prima e dopo terapia con ferro e acido folico. C'è differenza?

$$\bar{d}_{\text{dopo-prima}} = 1,15 \quad s_d = 0,83 \quad t = \frac{1,15}{0,83/\sqrt{12}} = 4,78 \quad (g = 11, t_{\text{tab}} = 2,201)$$

Conclusione. $4,78 > 2,201$: si rifiuta H_0 . La terapia **aumenta** l'emoglobina in modo significativo.

