



INFOMAAT
CENTRO RIPETIZIONI
SINCE 2011



STATISTICA · UNIVERSITÀ · ESERCIZI SVOLTI

Test di ipotesi per variabili quantitative

Sei esercizi sul confronto tra medie risolti passo per passo: una media contro un valore di riferimento, due campioni indipendenti e dati appaiati. Ogni svolgimento riporta ipotesi, statistica test, decisione e interpretazione.

Test t a una media

Due medie indipendenti

Dati appaiati

INFOMAAT — Centro di ripetizioni

Matematica e fisica · liceo e università · dal 2011

infomaat.it

I tre test t che useremo

Tutti i quesiti confrontano **medie**. Cambia solo come sono raccolti i dati. In ogni caso fissiamo l'ipotesi nulla H_0 , calcoliamo una statistica t e la confrontiamo con il valore critico della distribuzione di Student.

1 · UNA MEDIA CONTRO UN VALORE DI RIFERIMENTO

Un solo campione confrontato con un valore noto μ_0 . Gradi di libertà $g = n - 1$.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

2 · DUE MEDIE DA CAMPIONI INDIPENDENTI

Due gruppi separati (es. fumatrici / non fumatrici). Gradi di libertà $g = n_1 + n_2 - 2$.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

3 · DATI APPAIATI (STESSO SOGGETTO, DUE MISURE)

Stessi soggetti misurati due volte (prima/dopo, valutatore A/B). Si lavora sulle differenze $d = x_1 - x_2$, con media $\bar{d}$ e $g = m - 1$.

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{m}}} \quad s_d^2 = \frac{\sum (d - \bar{d})^2}{m - 1}$$

REGOLA DI DECISIONE (TEST BILATERALE, $\alpha = 0,05$)

Si calcola il valore critico $t_{\alpha/2; g}$. Se $|t| > t_{\alpha/2; g}$ si **rifiuta** H_0 (differenza significativa, $p < 0,05$); se $|t| \leq t_{\alpha/2; g}$ **non si rifiuta** H_0 ($p > 0,05$).



PROBLEMA 1

Peso dei neonati: fumatrici contro non fumatrici

CONSEGNA

Si ritiene che le gestanti che **continuano a fumare** in gravidanza partoriscono neonati di peso inferiore rispetto alle non fumatrici. Per verificarlo con $\alpha = 0,05$ si estrae un campione casuale di madri di neonati maschi e se ne registra il peso (in grammi).

GRUPPO	N	MEDIA (G)	S	S ²
Fumatrici	50	3197	172	29 584
Non fumatrici	60	3380	176	30 976

1 IPOTESI E MODELLO

Due campioni **indipendenti**. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (stesso peso medio) contro $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Gradi di libertà $g = n_1 + n_2 - 2 = 108$.

2 STATISTICA TEST

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{3197 - 3380}{\sqrt{\frac{29584}{50} + \frac{30976}{60}}} = \frac{-183}{\sqrt{591,68 + 516,27}} = -5,50$$

3 DECISIONE

Valore critico $t_{0,025; 108} = 1,98$. Poiché $|t| = 5,50 > 1,98$ (con $p \approx 2,6 \cdot 10^{-7}$) si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

Il peso medio dei neonati **differisce** in modo statisticamente significativo tra i due gruppi. Essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, i figli delle fumatrici pesano in media **meno** ($p < 0,05$).



PROBLEMA 2

pH del sangue e acidosi metabolica

CONSEGNA

In condizioni fisiologiche il pH medio del sangue è **7,4**. In un campione di **65** persone affette da diabete mellito il pH ematico ha media $\bar{x} = 7,1$ e deviazione standard $s = 0,13$. Con $\alpha = 0,05$: il campione è compatibile con la popolazione di riferimento o è in **acidosi metabolica**?

1 IPOTESI E MODELLO

Una sola media contro il valore noto $\mu_0 = 7,4$. $H_0 : \mu = 7,4$ contro $H_1 : \mu \neq 7,4$;
 $g = n - 1 = 64$.

2 STATISTICA TEST

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,1 - 7,4}{\frac{0,13}{\sqrt{65}}} = \frac{-0,3}{0,0161} = -18,61$$

3 DECISIONE

$t_{0,025; 64} = 2,00$. Poiché $|t| = 18,61 \gg 2,00$ ($p \approx 0$) si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

Il campione **non** è compatibile con la popolazione di riferimento. Poiché $7,1 < 7,4$, il pH è significativamente più basso: i pazienti sono in **acidosi metabolica** ($p < 0,05$).



PROBLEMA 3

Glicemia prima e dopo un farmaco

CONSEGNA

Si vuole verificare se un farmaco somministrato per favorire la digestione **modifichi la glicemia** (mg/dl). Su **10** pazienti la glicemia è misurata prima e dopo l'assunzione ($\alpha = 0,05$).

PAZIENTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prima	82	83	95	91	96	100	84	96	81	101
Dopo	85	81	87	84	90	98	85	98	82	96

1 DIFFERENZE APPAIATE

Stessi soggetti misurati due volte → **dati appaiati**. Calcoliamo $d = \text{prima} - \text{dopo}$:
 $-3, 2, 8, 7, 6, 2, -1, -2, -1, 5$. $H_0 : \mu_d = 0$ contro $H_1 : \mu_d \neq 0$; $g = m - 1 = 9$.

2 MEDIA E VARIANZA DELLE DIFFERENZE

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{m} = \frac{23}{10} = 2,3 \quad s_d^2 = \frac{\sum (d - \bar{d})^2}{m - 1} = \frac{144,1}{9} = 16,01 \Rightarrow s_d = 4,00$$

3 STATISTICA TEST E DECISIONE

$$t = \frac{\frac{\bar{d}}{s_d}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = \frac{2,3}{\frac{4,00}{\sqrt{10}}} = \frac{2,3}{1,265} = 1,82$$

$t_{0,025; 9} = 2,262$. Poiché $|t| = 1,82 < 2,262$ ($p = 0,103$) non si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

Non c'è evidenza di una **differenza significativa** nella glicemia prima e dopo il farmaco ($p > 0,05$).

! ERRORE COMUNE

Sbagliato

Usare il valore critico a **una coda** $t_{0,05; 9} = 1,833$: siccome **1,82** gli è vicinissimo, si è tentati di concludere "differenza".

Corretto

Il quesito ("il farmaco *modifica* la glicemia?") è **bilaterale** → si usa $t_{0,025; 9} = 2,262$. Con **1,82 < 2,262** non si rifiuta H_0 . Attenzione anche a dividere per $m - 1$, non per m , nel calcolo di s_d^2 .



PROBLEMA 4

Colesterolo HDL e fascia d'età

CONSEGNA

Si vuole stabilire se il **colesterolo HDL** sia legato all'età. Su **75** persone, suddivise in ultracinquantenni e under 50, si misura l'HDL ($\alpha = 0,05$).

ETÀ	N	$\bar{x}$	S	S^2
> 50 anni	40	34,55	6,95	48,30
< 50 anni	35	42,09	7,26	52,71

1 IPOTESI E MODELLO

Due campioni **indipendenti**. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contro $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$; $g = n_1 + n_2 - 2 = 73$.

2 STATISTICA TEST

$$t = \frac{34,55 - 42,09}{\sqrt{\frac{48,30}{40} + \frac{52,71}{35}}} = \frac{-7,54}{\sqrt{1,208 + 1,506}} = \frac{-7,54}{1,647} = -4,58$$

3 DECISIONE

$t_{0,025; 73} = 1,99$. Poiché $|t| = 4,58 > 1,99$ ($p \approx 1,9 \cdot 10^{-5}$) si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

L'HDL medio **differisce** tra le due fasce d'età; gli under 50 hanno valori più alti ($p < 0,05$).



PROBLEMA 5

Conteggio di emazie negli uomini

CONSEGNA

Negli uomini il valore medio di globuli rossi (emazie) è 5 milioni/mm³. In un campione di 40 uomini la media è 4,7 milioni/mm³ con deviazione standard 230 000/mm³. Con $\alpha = 0,05$, il campione è compatibile con la popolazione?

1 IPOTESI E MODELLO

Una media contro $\mu_0 = 5 \cdot 10^6$. $H_0 : \mu = 5 \cdot 10^6$ contro $H_1 : \mu \neq 5 \cdot 10^6$; $g = n - 1 = 39$.

2 STATISTICA TEST

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4\,700\,000 - 5\,000\,000}{\frac{230\,000}{\sqrt{40}}} = \frac{-300\,000}{36\,366} = -8,25$$

3 DECISIONE

$t_{0,025; 39} = 2,02$. Poiché $|t| = 8,25 \gg 2,02$ ($p \approx 0$) si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

Il campione **non** è compatibile con la popolazione: il conteggio medio di emazie è significativamente più **basso**, compatibile con un quadro anemico ($p < 0,05$).



PROBLEMA 6

Due docenti applicano lo stesso criterio?

CONSEGNA

Si vuole stabilire se due docenti, **A** e **B**, adottino lo **stesso criterio di valutazione**. Entrambi correggono i compiti degli stessi **15 studenti** ($\alpha = 0,05$).

STUDENTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Prof. A	5,3	7,6	8,1	4,3	4,0	2,2	6,3	5,7	4,8	6,8	7,1	7,3	5,9	5,1	8,9
Prof. B	5,6	7,1	8,1	4,8	4,3	1,9	6,0	5,9	5,5	6,0	8,2	7,0	6,2	4,8	9,0

1 DIFFERENZE APPAIATE

Gli stessi 15 studenti valutati da entrambi → **dati appaiati**. Con $d = A - B$ si ottiene $\sum d = -1,0$ e $\sum d^2 = 3,52$. $H_0 : \mu_d = 0$ contro $H_1 : \mu_d \neq 0$; $g = m - 1 = 14$.

2 MEDIA E VARIANZA DELLE DIFFERENZE

$$\bar{d} = \frac{-1,0}{15} = -0,067 \quad s_d^2 = \frac{\sum d^2 - m \bar{d}^2}{m - 1} = \frac{3,52 - 0,067}{14} = 0,247$$

da cui $s_d = \sqrt{0,247} = 0,497$.

3 STATISTICA TEST E DECISIONE

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{m}}} = \frac{-0,067}{\frac{0,497}{\sqrt{15}}} = \frac{-0,067}{0,128} = -0,52$$

$t_{0,025; 14} = 2,145$. Poiché $|t| = 0,52 < 2,145$ ($p = 0,611$) non si rifiuta H_0 .

CONCLUSIONE

Non emerge alcuna differenza significativa: i due docenti applicano sostanzialmente lo **stesso criterio** di valutazione ($p > 0,05$).

IN SINTESI

Quando il quesito non indica una direzione ("è diverso?", "modifica?", "è lo stesso criterio?") il test è **bilaterale**: si rifiuta H_0 solo se $|t| > t_{0,025; g}$. È accaduto nei problemi 1, 2, 4 e 5 (differenza reale, $p < 0,05$), non nei problemi 3 e 6, dove la differenza osservata rientra nella normale variabilità campionaria ($p > 0,05$).

