



STATISTICA · UNIVERSITÀ

Formulario Test di ipotesi

Tredici casi a confronto. Per ognuno: la statistica test, le condizioni di applicabilità e le tre modalità di rifiuto equivalenti — statistica vs valore critico, valore campionario critico, p-value — sulle tre alternative. In chiusura: potenza del test e dimensione campionaria.



INFOMAAT — Andrea Paone

Centro di ripetizioni · matematica e fisica · dal 2011

Come leggere il formulario

LOGICA DEL TEST

Si formulano due ipotesi: quella nulla H_0 (di solito l'uguaglianza) e l'alternativa H_1 . Si sceglie il livello α e si costruisce la **regione di rifiuto**. Se il campione vi cade, si rifiuta H_0 .

Si fissa α al minimo quando le conseguenze del rifiutare H_0 mentre è vera sono gravi.

LE TRE MODALITÀ (EQUIVALENTI)

- ① Confronto della **statistica** osservata con il valore critico (z_{oss} vs $z_{1-\alpha}$, ecc.).
- ② **Valore campionario critico**: soglia direttamente su $\bar{x}$ (o $\hat{\pi}$, $\bar{d}$, s^2).
- ③ **p-value**: si rifiuta se $p < \alpha$.

CONVENZIONE SUI QUANTILI

z_α indica qui il quantile di **coda destra**: $P(Z > z_\alpha) = \alpha$. Vale quindi

$$z_\alpha = z_{1-\alpha} \quad z_{\alpha/2} = z_{1-\alpha/2}$$

Per questo la colonna ① usa $z_{1-\alpha}$ e la colonna ② usa z_α : sono lo **stesso** numero. z_{oss}/t_{oss} = valore osservato della statistica.





CASO 1

Media, varianza σ^2 nota, popolazione normale

STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Campione casuale semplice
- La varianza σ^2 della popolazione è **nota**
- Popolazione distribuita normalmente

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu \neq \mu_0$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$2 P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu > \mu_0$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu < \mu_0$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\bar{x} < \mu_0 - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$





CASO 2

Media, varianza σ^2 non nota, popolazione normale

STATISTICA TEST

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Campione casuale semplice
- La varianza σ^2 della popolazione **non** è nota
- Popolazione distribuita normalmente
- Statistica T con $n - 1$ gradi di libertà; s = deviazione standard campionaria corretta

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu \neq \mu_0$	$ T \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}$	$ \bar{x} - \mu_0 > t_{1-\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$2 P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu > \mu_0$	$T \geq t_{1-\alpha}^{n-1}$	$\bar{x} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu < \mu_0$	$T \leq -t_{1-\alpha}^{n-1}$	$\bar{x} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$P(T < t_{oss} \mid H_0) < \alpha$





CASO 3

Media, varianza σ^2 nota, distribuzione arbitraria

STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Identico al **Caso 1**: per il Teorema del Limite Centrale la media campionaria è approssimativamente normale, quindi si usano le stesse tre modalità di rifiuto.

IPOTESI E CONDIZIONI

- Campione casuale semplice
- La varianza σ^2 è nota
- Distribuzione qualsiasi ma

numerosità elevata $n \geq 30$:
vale il TLC

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu \neq \mu_0$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$2 P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu > \mu_0$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu < \mu_0$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\bar{x} < \mu_0 - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$





CASO 4

Media, varianza σ^2 non nota, distribuzione arbitraria

STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Campione casuale semplice
- La varianza σ^2 non è nota $\rightarrow$ si stima con s^2
- Distribuzione qualsiasi ma

numerosità elevata $n \geq 30$:
vale il TLC e $s \approx \sigma$

- Se la distribuzione non è nota e n è piccolo si ricorre ai **test non parametrici** (test sui ranghi, test di Wilcoxon)

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu \neq \mu_0$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$2 P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu > \mu_0$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu = \mu_0$ $H_1 \mu < \mu_0$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\bar{x} < \mu_0 - z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$





CASO 5

Proporzione (popolazione bernoulliana)

STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- La popolazione segue una distribuzione bernoulliana
- La proporzione campionaria $\hat{\pi}$ coincide con la media per caratteri dicotomici (0-1)
- Sotto H_0 la varianza è $\pi_0(1 - \pi_0)$
- Approssimazione normale

valida per $n\pi_0 \geq 5$ e $n(1 - \pi_0) \geq 5$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \pi = \pi_0$ $H_1 \pi \neq \pi_0$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$ \hat{\pi} - \pi_0 > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}$	$2 P(Z > z_{oss} H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \pi = \pi_0$ $H_1 \pi > \pi_0$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\hat{\pi} > \pi_0 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}$	$P(Z > z_{oss} H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \pi = \pi_0$ $H_1 \pi < \pi_0$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\hat{\pi} < \pi_0 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}$	$P(Z < z_{oss} H_0) < \alpha$



**Varianza di una popolazione (test χ^2)**

STATISTICA TEST

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Analogo a una popolazione del test di omoschedasticità (Caso 9). $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

IPOTESI E CONDIZIONI

- Campione casuale semplice
- Popolazione distribuita normalmente (il test è sensibile alla non-normalità)
- s^2 = varianza campionaria corretta; statistica con $n - 1$ gradi di libertà
- La distribuzione χ^2 è **asimmetrica**: nel caso bilaterale i due valori critici non sono simmetrici

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ oppure $\chi^2 \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2$	$s^2 > \frac{\sigma_0^2 \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{n-1}$ opp. $s^2 < \frac{\sigma_0^2 \chi_{\alpha/2, n-1}^2}{n-1}$	$2 \min\{P(\chi^2 > \chi_{oss}^2), P(\chi^2 < \chi_{oss}^2)\} < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha, n-1}^2$	$s^2 > \frac{\sigma_0^2 \chi_{1-\alpha, n-1}^2}{n-1}$	$P(\chi^2 > \chi_{oss}^2 H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{\alpha, n-1}^2$	$s^2 < \frac{\sigma_0^2 \chi_{\alpha, n-1}^2}{n-1}$	$P(\chi^2 < \chi_{oss}^2 H_0) < \alpha$

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni casuali semplici indipendenti di numerosità n e m
- Le varianze σ_x^2 , σ_y^2 sono **note**
- Popolazioni normali
- $d_0 = \mu_x - \mu_y$ sotto H_0 (spesso $d_0 = 0$)

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x \neq \mu_y$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$ \bar{x} - \bar{y} - d_0 > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$	$2 P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x > \mu_y$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\bar{x} - \bar{y} > d_0 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x < \mu_y$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\bar{x} - \bar{y} < d_0 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$



CASO 8

Differenza di medie, indipendenti, varianze non note ma uguali, normali

STATISTICA TEST

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni indipendenti, popolazioni normali
- Varianze non note ma uguali: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (verificabile col Caso 9)
- Statistica T con $n + m - 2$ gradi di libertà

VARIANZA POOLED

$$S_p^2 = \frac{s_x^2(n-1) + s_y^2(m-1)}{n+m-2}$$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x \neq \mu_y$	$ T \geq t_{1-\alpha/2}^{n+m-2}$	$ \bar{x} - \bar{y} - d_0 > t_{1-\alpha/2}^{n+m-2} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$	$2 P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x > \mu_y$	$T \geq t_{1-\alpha}^{n+m-2}$	$\bar{x} - \bar{y} > d_0 + t_{1-\alpha}^{n+m-2} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$	$P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu_x = \mu_y$ $H_1 \mu_x < \mu_y$	$T \leq -t_{1-\alpha}^{n+m-2}$	$\bar{x} - \bar{y} < d_0 - t_{1-\alpha}^{n+m-2} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$	$P(T < t_{oss} \mid H_0) < \alpha$

Nota Corretto rispetto alla bozza: nel calcolo del **valore campionario critico** il quantile è t^{n+m-2} (i gradi di libertà della statistica pooled), non t^{n-1} .





CASO 9

Uguaglianza tra varianze / omoschedasticità (test F)

STATISTICA TEST

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni indipendenti da popolazioni normali
- Statistica F di Fisher-Snedecor con $(n-1, m-1)$ gradi di libertà
- Per convenzione si pone al numeratore la varianza campionaria maggiore
- Relazione utile: $F_{\alpha}^{a,b} = \frac{1}{F_{1-\alpha}^{b,a}}$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1 \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$	$\frac{s_x^2}{s_y^2} \geq F_{1-\alpha/2}^{n-1, m-1}$ opp. $\frac{s_x^2}{s_y^2} \leq F_{\alpha/2}^{n-1, m-1}$	coincide con la colonna 1	$2 \min\{P(F > F_{oss}), P(F < F_{oss})\} < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1 \sigma_x^2 > \sigma_y^2$	$\frac{s_x^2}{s_y^2} \geq F_{1-\alpha}^{n-1, m-1}$	coincide con la colonna 1	$P(F > F_{oss} H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1 \sigma_x^2 < \sigma_y^2$	$\frac{s_x^2}{s_y^2} \leq F_{\alpha}^{n-1, m-1}$	coincide con la colonna 1	$P(F < F_{oss} H_0) < \alpha$

Per il test F la statistica è il rapporto tra varianze campionarie: la modalità «valore campionario critico» coincide con il confronto della statistica.



Z

CASO 10

Differenza di medie, indipendenti, varianze non note ma uguali, distribuzione arbitraria

STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni indipendenti, distribuzioni qualsiasi
- Numerosità elevate ($n, m \geq 30$): vale il TLC
- Varianze non note ma uguali → si usa S_p^2 (Caso 8)

VARIANZA POOLED

$$S_p^2 = \frac{s_x^2(n-1) + s_y^2(m-1)}{n+m-2}$$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0: \mu_x = \mu_y$ $H_1: \mu_x \neq \mu_y$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$\frac{ \bar{x} - \bar{y} - d_0 }{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}}$ $> z_{\alpha/2}$	$2P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0: \mu_x = \mu_y$ $H_1: \mu_x > \mu_y$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\bar{x} - \bar{y} > d_0 + z_{\alpha} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0: \mu_x = \mu_y$ $H_1: \mu_x < \mu_y$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\bar{x} - \bar{y} < d_0 - z_{\alpha} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$





CASO 11

Differenza di medie, indipendenti, varianze non note e diverse — test di Welch

STATISTICA TEST

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni indipendenti da popolazioni normali
- Varianze non note e **diverse** ($\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$)
- Statistica T con g gradi di libertà (Welch–Satterthwaite, arrotondati per difetto)

GRADI DI LIBERTÀ (WELCH–SATTERTHWAITE)

 g

$$= \frac{\left(\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m} \right)^2}{\frac{(s_x^2/n)^2}{n-1} + \frac{(s_y^2/m)^2}{m-1}}$$

Ipotesi

1 Statistica vs valore critico

2 Valore campionario critico

3 p-value

Bilaterale

$H_0 \mu_x = \mu_y$

$H_1 \mu_x \neq \mu_y$

$|T| \geq t_{1-\alpha/2}^g$

$|\bar{x} - \bar{y} - d_0| > t_{1-\alpha/2}^g \sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}$

$2 P(T > |t_{oss}| \mid H_0) < \alpha$

Unilaterale destro

$H_0 \mu_x = \mu_y$

$H_1 \mu_x > \mu_y$

$T \geq t_{1-\alpha}^g$

$\bar{x} - \bar{y} > d_0 + t_{1-\alpha}^g \sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}$

$P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$

Unilaterale sinistro

$H_0 \mu_x = \mu_y$

$H_1 \mu_x < \mu_y$

$T \leq -t_{1-\alpha}^g$

$\bar{x} - \bar{y} < d_0 - t_{1-\alpha}^g \sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}$

$P(T < t_{oss} \mid H_0) < \alpha$

Nota Corretto rispetto alla bozza: la formula di Welch–Satterthwaite richiede i **quadrati** sia al numeratore sia nei termini a denominatore; senza i quadrati i gradi di libertà risultano sbagliati (verificato numericamente contro scipy).





CASO 12

Due medie dipendenti (dati appaiati) — test T sulle differenze

STATISTICA TEST

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_{d,0}}{s_d / \sqrt{n}} \quad (\mu_{d,0} = 0 \text{ tipicamente})$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due popolazioni fortemente correlate: misure prima/dopo, stesso soggetto, coppie di fratelli, ecc.
- Si lavora sulle differenze $d_i = x_i - y_i$; $\bar{d}$ e s_d ne sono media e deviazione standard corrette
- Statistica T con $n - 1$ gradi di libertà; nella maggior parte dei casi $H_0 : \mu_d = 0$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0 \mu_d = 0$ $H_1 \mu_d \neq 0$	$ T \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}$	$ \bar{d} > t_{1-\alpha/2}^{n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$	$2 P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0 \mu_d = 0$ $H_1 \mu_d > 0$	$T \geq t_{1-\alpha}^{n-1}$	$\bar{d} > t_{1-\alpha}^{n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$	$P(T > t_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0 \mu_d = 0$ $H_1 \mu_d < 0$	$T \leq -t_{1-\alpha}^{n-1}$	$\bar{d} < -t_{1-\alpha}^{n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$	$P(T < t_{oss} \mid H_0) < \alpha$



$$Z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

IPOTESI E CONDIZIONI

- Due campioni indipendenti da popolazioni bernoulliane
- Sotto $H_0: \pi_x = \pi_y$ si usa la proporzione combinata (pooled) $\hat{p}$
- Approssimazione normale valida per campioni sufficientemente numerosi

PROPORZIONE COMBINATA

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_x + m\hat{p}_y}{n + m}$$

Ipotesi	1 Statistica vs valore critico	2 Valore campionario critico	3 p-value
Bilaterale $H_0: \pi_x = \pi_y$ $H_1: \pi_x \neq \pi_y$	$ Z \geq z_{1-\alpha/2}$	$\frac{ \hat{p}_x - \hat{p}_y }{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$ $> z_{\alpha/2}$	$2P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale destro $H_0: \pi_x = \pi_y$ $H_1: \pi_x > \pi_y$	$Z \geq z_{1-\alpha}$	$\hat{p}_x - \hat{p}_y > z_{\alpha} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$	$P(Z > z_{oss} \mid H_0) < \alpha$
Unilaterale sinistro $H_0: \pi_x = \pi_y$ $H_1: \pi_x < \pi_y$	$Z \leq -z_{1-\alpha}$	$\hat{p}_x - \hat{p}_y < -z_{\alpha} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$	$P(Z < z_{oss} \mid H_0) < \alpha$



POTENZA DEL TEST

Errore di II tipo e potenza (test Z sulla media, σ^2 nota)

DEFINIZIONI

- $\alpha = P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_0 \text{ vera})$ — errore di **I tipo** (livello).
- $\beta = P(\text{accettare } H_0 \mid H_1 \text{ vera})$ — errore di **II tipo**.
- **Potenza** $= 1 - \beta = P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_1 \text{ vera})$.
- La potenza si calcola fissando un valore alternativo specifico μ_1 e misurando la probabilità che $\bar{x}$ cada nella regione di rifiuto **quando la media vera è μ_1** .

EFFETTO STANDARDIZZATO

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Alternativa	Regione di rifiuto (su $\bar{x}$)	Potenza $1 - \beta$
Unilaterale destro $H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right)$
Unilaterale sinistro $H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right)$
Bilaterale $H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$	$ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$1 - \beta = \Phi(\delta - z_{\alpha/2}) + \Phi(-\delta - z_{\alpha/2})$

DIMENSIONE CAMPIONARIA (TEST UNILATERALE) PER POTENZA $1 - \beta$ A μ_1

$$n = \left(\frac{(z_\alpha + z_\beta) \sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \Rightarrow \text{arrotonda per eccesso}$$

Con varianza non nota (T) la potenza esatta usa la distribuzione t non centrale; nei corsi si adotta di norma l'approssimazione normale qui riportata. La stessa logica — calcolare la probabilità della regione di rifiuto sotto H_1 — vale per proporzioni e differenze di medie.

